

(فصل ۴)

استدلال ریاضی

۱۳۰

استدلال ریاضی

(فصل ۵)

نظریهٔ اعداد

۱۳۵

درس ۱: بخش‌پذیری در اعداد صحیح

۱۴۵

درس ۲: هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها

(فصل ۱)

آشنایی با مبانی ریاضیات

۷

درس ۱: آشنایی با منطق ریاضی

۲۲

درس ۲: مجموعه‌ها

(فصل ۶)

گراف و مدل‌سازی

۱۶۲

درس ۱: معرفی گراف

۱۷۹

درس ۲: مدل‌سازی با گراف

(فصل ۲)

احتمال

۴۵

درس ۱: شمارش، بدون شمردن (آنالیز ترکیبی)

۵۵

درس ۲: مبانی احتمال

۶۵

درس ۳: احتمال غیرهم‌شانس

۷۰

درس ۴: احتمال شرطی

۸۱

درس ۵: پیشامدهای مستقل و وابسته

(فصل ۷)

ترکیبیات

۱۹۲

درس ۱: مباحثی در ترکیبیات

۲۰۶

درس ۲: روش‌هایی برای شمارش

(فصل ۳)

آمار

۸۸

درس ۱: آمار توصیفی

۱۲۱

درس ۲: آمار استنباطی

۲۱۷

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

۲۵۲

پاسخ‌نامهٔ کلیدی

(درس ۲)

مدل سازی با گراف

•	•	•
•	♔	•
•	•	•

یک صفحه شطرنج سه درسه را در نظر بگیرید. اگر یک وزیر در وسط آن قرار دهیم، هر مهره دیگری، در هر قسمتی از صفحه که باشد، وزیر می تواند آن مهره را بزند.

•	•	•	
•	♔	•	•
•	•	•	
	•		•

اما اگر صفحه شطرنج 4×4 باشد، چه طور؟ آیا می توان با قراردادن یک وزیر، کاری کرد که هر مهره ای، در هر قسمتی از صفحه که باشد، توسط وزیر تهدید شود؟ همان طور که می بینید:

•	•	•	•
•	♔	•	•
•	•	•	•
•	•	•	♔

با قراردادن فقط یک وزیر، چنین امری امکان پذیر نیست و دست کم چهار نقطه، پوشش داده نمی شوند. برای انجام این کار، به دست کم ۲ وزیر نیاز داریم: چنین مسئله هایی باعث شد که مفهومی در شاخه گراف به وجود آید به نام احاطه گری.^۱

فصل ششم گراف و مدل سازی

۸								
۷								
۶			♔					
۵						♔		
۴								
۳			♔					
۲					♔			
۱								
	a	b	c	d	e	f	g	h

تست در صفحه شطرنج روبه رو، وزیر پنجم در کدام مربع باشد تا همه صفحه شطرنج توسط وزیرها پوشیده شود؟

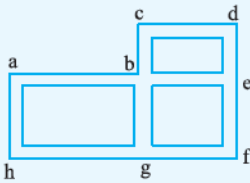
- ۱) yg
- ۲) ya
- ۳) $4d$

۴) با همین ۴ وزیر نیز همه صفحه پوشیده شده.

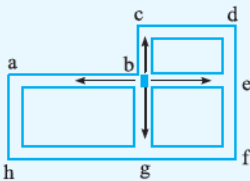
۸	•	✓	•x	••	x	•✓		
۷	•	✓	•	•x	•	x✓		x
۶	••	✓	•	•	•x	•x	•x	•
۵	x	•x	•x	•x	•x	•	x	x•
۴	•✓	✓	•✓		•x	x	•x	
۳	✓	•	•✓	•✓	•✓	•x	✓	x✓
۲	✓	✓	•x	•	•	•x	••	•
۱	•	x✓	•	✓	•	•x		•
	a	b	c	d	e	f	g	h

پاسخ گزینه ۳ خب بررسی کنیم و ببینیم ۴ وزیر حاضر، چه خانه هایی از صفحه را پوشش می دهند. همان طور که دیده می شود، مربع های $a_1, a_7, d_4, d_8, g_1, g_7, h_4$ و h_8 پوشش داده نشده اند که با قراردادن یک وزیر در $4d$ ، همه این نقاط نیز پوشش داده می شوند.

تست فرض کنید که شکل زیر، نقشه یک منطقه از شهر است. قرار است در برخی تقاطع‌های شهر، دستگاه خودپرداز به گونه‌ای نصب شود که هر فرد، در هر تقاطعی که باشد یا در آن تقاطع، خودپرداز باشد یا حداکثر با رفتن به تقاطع مجاور، به دستگاه خودپرداز دسترسی داشته باشد. در کدام حالت این اتفاق نمی‌افتد؟



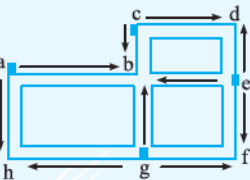
- (۱) خودپردازها در تقاطع‌های b, d و g باشند.
- (۲) خودپردازها در تقاطع‌های a و b, f باشند.
- (۳) خودپردازها در تقاطع‌های b و g, e باشند.
- (۴) خودپردازها در تقاطع‌های a, g, e و c باشند.



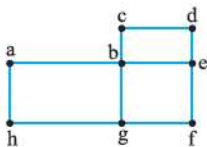
پاسخ گزینه ۲: با قراردادن یک خودپرداز در تقاطع b ، همه تقاطع‌های a, c, e و g پوشش داده می‌شوند و فقط سه تقاطع d, f و h باقی می‌مانند؛ در (۱) اگر دو خودپرداز در d و g قرار دهیم، خودپرداز g ، تقاطع‌های f و h را نیز پوشش می‌دهد. (باقی تقاطع‌ها نیز توسط b پوشش داده شده‌اند).

در (۲) با قراردادن دو خودپرداز دیگر در a و f ، هیچ خودپردازی تقاطع d را پوشش نمی‌دهد و بنابراین پاسخ همین (۲) است. خوب است که (۲) و (۴) را هم بررسی کنیم؛

در (۳) اگر به‌جز خودپرداز b ، دو خودپرداز دیگر در e و g قرار دهیم، خودپرداز e ، دو تقاطع d و f و خودپرداز g ، تقاطع h را پوشش می‌دهند و بنابراین همه تقاطع‌ها پوشش داده می‌شوند.



در (۴) در چهار نقطه، خودپرداز قرار داده‌ایم. خودپرداز a ، تقاطع‌های b و h را پوشش می‌دهد. خودپرداز g نیز، تقاطع‌های f, h و b را پوشش می‌دهد. توسط خودپرداز e ، تقاطع‌های d, f و b پوشش داده می‌شوند و با قراردادن یک خودپرداز دیگر در نقطه c ، این نقطه نیز پوشش داده می‌شود.

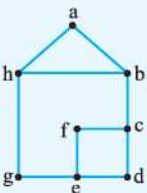


فرض کنید که در مثال قبل، منطقه موردنظر را توسط گراف، مدل‌سازی کنیم. به این صورت که تقاطع‌ها را با رأس‌ها و خیابان‌ها را با یال‌ها نشان دهیم. گراف به وجود آمده به صورت روبه‌رو خواهد بود:

حالا مجموعه داده‌شده در (۱) یعنی $\{b, d, g\}$ را در نظر بگیرید. هر رأسی از گراف را که در نظر بگیرید، یا خودش عضو این مجموعه است (مثل رأس d) یا دست‌کم به یکی از اعضای این مجموعه وصل است. به عنوان مثال، رأس f در مجموعه نیست، ولی به رأس g وصل است. به چنین مجموعه‌ای، یک مجموعه احاطه‌گر گراف گفته می‌شود.

مجموعه احاطه‌گر: زیرمجموعه D از رئوس گراف G را مجموعه احاطه‌گر می‌نامیم، هرگاه هر رأسی از گراف که در D نباشد، دست‌کم به یکی از رأس‌های عضو D وصل باشد.

واضح است که هر گراف، مجموعه‌های احاطه‌گر مختلفی، می‌تواند داشته باشد. مثلاً در تست قبل، نه تنها هر سه مجموعه $\{b, g, d\}$ ، $\{b, g, e\}$ و $\{a, c, e, g\}$ احاطه‌گرند، تازه احاطه‌گر بیشتری هم برای گراف داده‌شده، می‌توانیم بنویسیم.



تست در گراف روبه‌رو، کدام مجموعه، احاطه‌گر است؟

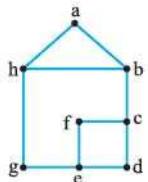
- (۱) $\{h, f\}$
- (۲) $\{h, d\}$
- (۳) $\{a, d, g\}$
- (۴) $\{b, e\}$

پاسخ گزینه ۱: در رأس d ، نه خودش عضو مجموعه است و نه به هیچ‌کدام از دو رأس h و f وصل است.

در رأس f ، نه خودش عضو مجموعه است و نه به هیچ‌کدام از دو رأس h و d وصل است.

در رأس f ، نه عضو مجموعه $\{a, d, g\}$ است و نه به هیچ‌کدام از این سه رأس، وصل است.

اما مجموعه $\{b, e\}$ ، یک مجموعه احاطه‌گر است، چرا که هر رأس گراف، یا عضو این مجموعه است یا به حداقل یکی از این دو رأس، وصل است. بنابراین (۴) درست است.

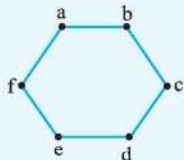


روشن است که گراف روبه‌رو، مجموعه‌های احاطه‌گر فراوانی دارد. بزرگ‌ترین آن، همان مجموعه رأس‌های گراف، یعنی $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ است. $\{h, f, d\}$ ، یک مجموعه احاطه‌گر سه‌عضوی از این گراف است، اما در میان همه مجموعه‌های احاطه‌گر این گراف، کدام مجموعه کم‌ترین تعداد عضو را دارد؟ همان‌طور که دیدید، مجموعه $\{e, b\}$ ، یک مجموعه احاطه‌گر دو‌عضوی این گراف بود که بدیهی است کم‌ترین تعداد عضو را نیز دارد. به چنین مجموعه‌ای، مجموعه احاطه‌گر مینیمم می‌گوییم. **مجموعه احاطه‌گر مینیمم:** در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G ، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کم‌ترین تعداد عضو را دارند، مجموعه احاطه‌گر مینیمم می‌نامیم. تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

● به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم از گراف G ، یک γ - مجموعه می‌گوییم.

برای مثال، عدد احاطه‌گری برای مثال قبل، برابر ۲ است و مجموعه $\{b, e\}$ ، یک γ - مجموعه، برای گراف داده شده است.

تست درباره گراف روبه‌رو کدام گزینه درست نیست؟



(۱) $\{b, d, f\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است.

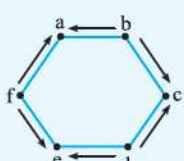
(۲) $\gamma(G)$ در این گراف برابر ۲ است.

(۳) هر مجموعه سه‌عضوی دلخواه یک مجموعه احاطه‌گر است.

(۴) این گراف دارای سه γ - مجموعه است.

پاسخ گزینه ۳ $\{b, d, f\}$ ، یک مجموعه احاطه‌گر است؛ زیرا همه رأس‌های گراف، یا عضوی از این مجموعه‌اند

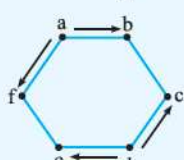
یا به یکی از رئوس این مجموعه وصل‌اند.



$\gamma(G)$ در این گراف برابر ۲ است، چون با یک رأس، کل رأس‌ها پوشش داده نمی‌شود و از طرفی هم $\{a, d\}$ ، یک

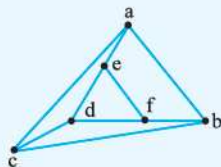
مجموعه احاطه‌گر است که دو عضو دارد.

اگر کمی دقت کنید، می‌فهمید که این گراف، دارای سه تا γ - مجموعه به صورت‌های $\{a, d\}$ ، $\{b, e\}$ و $\{c, f\}$ است، بنابراین (۴) هم درست است.



اما (۲) نادرست است، زیرا به عنوان مثال $\{a, b, c\}$ یک مجموعه احاطه‌گر نیست، زیرا رأس e ، نه عضو این مجموعه است و نه به هیچ‌کدام از سه رأس a ، b و c وصل است.

تست در گراف روبه‌رو $\gamma(G)$ کدام است؟



(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

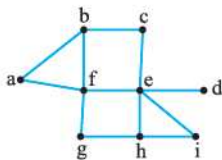
(۴) ۱

پاسخ گزینه ۱ من می‌گویم $\gamma(G) = 1$ نیست، چرا؟ چون اگر فقط یکی از رأس‌ها را در نظر بگیریم (مثلاً رأس a)، دو رأس وجود دارد که به آن

وصل نیست (d و f)، اما می‌توانیم نتیجه بگیریم $\gamma(G) = 2$. مثلاً کافی است یک رأس از مثلث داخلی و یک رأس از مثلث خارجی انتخاب کنیم، مثل

$\{a, e\}$ ، تا همه رأس‌های دیگر گراف، به حداقل یکی از این‌ها وصل باشد.

مجموعه احاطه‌گر مینیمال



گراف روبه‌رو را در نظر بگیرید. مجموعه‌های احاطه‌گر مختلفی، برای این گراف، می‌توانیم بنویسیم. به عنوان مثال

$\{e, a, g\}$ ، $\{d, h, f, a, c\}$ و $\{f, e\}$ ، سه مجموعه احاطه‌گر مختلف‌اند. هم‌چنین در این گراف، $\gamma(G) = 2$

و مجموعه $\{f, e\}$ ، یک γ - مجموعه است. خوب این‌ها را قبلاً گفته‌ایم.

حالا مجموعه $\{a, e, g\}$ را در نظر بگیرید. این مجموعه، یک مجموعه احاطه‌گر است، اما اگر هر کدام از اعضای آن را حذف کنیم، مجموعه به وجود آمده، دیگر احاطه‌گر نیست. به بیان دیگر، هیچ‌کدام از سه مجموعه $\{a, e\}$ ، $\{a, g\}$ و $\{g, e\}$ احاطه‌گر نیستند. به چنین مجموعه‌هایی، مجموعه احاطه‌گر مینیمال می‌گویند.

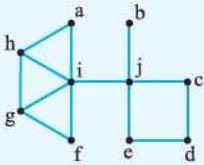
مجموعه احاطه‌گر مینیمال: مجموعه احاطه‌گری که با حذف هر یک از عضوهایش، دیگر احاطه‌گر نباشد را، مجموعه احاطه‌گر مینیمال می‌گویند.

مثلاً مجموعه $\{a, c, d, f, h\}$ ، احاطه‌گر مینیمال نیست، زیرا اگر a را حذف کنیم، مجموعه $\{c, d, f, h\}$ ، باز یک مجموعه احاطه‌گر است. از

طرفی دیدیم $\{f, e\}$ ، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم و $\{a, e, g\}$ ، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است. بنابراین:

یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال می‌تواند مینیمم نباشد، اما برعکس، هر مجموعه احاطه‌گر مینیمم قطعاً مینیمال است.

تست در گراف روبه‌رو، کدام مجموعه، احاطه‌گر مینیمال نیست؟



- ۱) $\{i, j, d\}$
- ۲) $\{i, d, b, g\}$
- ۳) $\{h, g, j, e\}$
- ۴) $\{a, f, d, b\}$

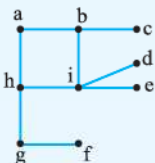
پاسخ گزینه ۲: کمی جستجو کنید! به نظر می‌رسد با دو رأس، نمی‌توانیم کل رأس‌های دیگر را پوشش دهیم. من می‌گویم بهتر است از قسمت چپ گراف، i را بگیریم و از راستی هم، j را بگیریم، اما هنوز رأس d به هیچ کدام وصل نیست. مجموعه $\{i, j, d\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است، پس $\gamma(G) = 3$ می‌شود. با حذف هر کدام از سه عضو i یا j یا d ، مجموعه $\{i, j, d\}$ دیگر یک γ - مجموعه نیست، پس این مجموعه، احاطه‌گر مینیمال هم می‌شود. در بالا هم گفتیم که هر مجموعه احاطه‌گر مینیمم، مینیمال هم هست. اما مجموعه $\{i, d, b, g\}$ مینیمال نیست، زیرا اگر g را حذف کنیم، مجموعه $\{i, d, b\}$ نیز باز احاطه‌گر است. بنابراین (۲) پاسخ سؤال است. مجموعه‌های $\{h, g, j, e\}$ و $\{a, f, d, b\}$ ، نیز دو مجموعه احاطه‌گر مینیمال هستند، زیرا اگر هر کدام از اعضای آن حذف شوند، مجموعه‌های باقی‌مانده، دیگر احاطه‌گر نیستند. می‌بینیم که هنوز دارید بدطور نگاه می‌کنید!

برای روشن شدن بیشتر این موضوع و درک بهتر مجموعه‌های مینیمال، بررسی می‌کنیم که چرا با حذف هر کدام از اعضای این مجموعه‌ها، مجموعه جدید به وجود آمده دیگر مینیمال نیست.

مجموعه $\{h, g, j, e\}$ را در نظر بگیرید:

- اگر e حذف شود، رأس d به هیچ کدام از j و g و h وصل نیست.
- اگر h حذف شود، رأس a به هیچ کدام از e و j و g وصل نیست.
- و بالاخره اگر g حذف شود، رأس f به هیچ رأسی از h و j و e وصل نیست.
- اگر برای مجموعه $\{a, f, d, b\}$ هم همین کارها را انجام دهید، می‌بینید که هیچ رأسی قابل حذف شدن نیست. (همه رو من نباید بگم که!)

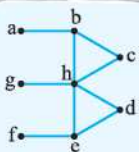
تست در گراف روبه‌رو، مجموعه $\{i, b, h, g, f, c\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است. حداکثر چند عضو این مجموعه را می‌توان حذف کرد، به طوری که مجموعه به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال تبدیل شود؟



- ۱) ۱
- ۲) ۲
- ۳) ۳
- ۴) ۴

پاسخ گزینه ۳: هر مجموعه احاطه‌گر مینیمم، مینیمال هم هست. مجموعه احاطه‌گر مینیمم، کم‌ترین تعداد رأس را در بین همه مجموعه‌های احاطه‌گر دارد، پس اگر بتوانیم با حذف رأس‌ها از مجموعه داده‌شده، به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برسیم، با یک تیر، دو نشان زده‌ایم؛ هم مینیمال ساختاریم و هم رأس‌های بیشتری را حذف کرده‌ایم. از بین i و d و e حداقل یکی را باید بگیریم، اما رأسی که درجه بزرگ‌تری دارد و به رأس‌های بیشتری وصل است، رأس i است، پس بهتر است آن را انتخاب کنیم. اگر i را داخل مجموعه قرار دهیم، رأس‌های d, b, e, h را نیز احاطه می‌کند. از میان f و g نیز حتماً باید یک عضو در مجموعه باشد که همدیگر را احاطه کنند. هم‌چنین چون در مجموعه $\{i, f\}$ ، a و c احاطه نشده‌اند، باید عضو دیگری به آن اضافه کرد که a و c نیز احاطه شوند. بنابراین برای داشتن یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم، دست‌کم به سه عضو نیاز داریم. حالا مثلاً مجموعه $\{i, b, f\}$ ، یک γ - مجموعه است. به همین خاطر می‌توانیم از مجموعه $\{i, b, h, g, f, c\}$ ، حداکثر سه عضو c, g, h را حذف کنیم تا به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال برسیم. پس (۳) درست است.

تست در گراف روبه‌رو، $\gamma(G)$ برابر و اگر A یک مجموعه مینیمال باشد، حداکثر عضو دارد.



- ۱) $4 - 2$
- ۲) $5 - 2$
- ۳) $4 - 3$
- ۴) $5 - 3$

پاسخ گزینه ۲: از بین a و b حداقل یکی را باید بگیریم که بهتر است b باشد. شبیه همین، بهتر است e را بگیریم. اما با دو رأس $\{b, e\}$ ، کل رأس‌های دیگر احاطه نمی‌شود، بنابراین γ - مجموعه، دست‌کم باید سه عضو داشته باشد. مثلاً $\{b, h, e\}$ ، یک γ - مجموعه است و در نتیجه $\gamma(G) = 3$ خواهد بود، اما اگر به جای b ، a را می‌گرفتیم و به جای e ، f و هم‌چنین h را در مجموعه احاطه‌گر قرار ندهیم، مجموعه $\{a, g, f, d, c\}$ ، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است، زیرا اگر هر کدام از این اعضا را حذف کنیم، خود آن رأس، احاطه نمی‌شود. بنابراین در این گراف می‌توانیم مجموعه احاطه‌گر مینیمال حداکثر ۵ عضوی، داشته باشیم.

جزء صحیح و سقف:

جزء صحیح: به $[x]$ ، جزء صحیح x می‌گوییم. اگر x عددی صحیح باشد، $[x]$ با خود x برابر است، اما اگر x صحیح نباشد، $[x]$ عدد صحیح قبلی آن است. مثلاً $[2] = 2$ و $[4/3] = 1$.

سقف: به $\lceil x \rceil$ ، سقف عدد x می‌گوییم. اگر x عددی صحیح باشد، $\lceil x \rceil$ همان x است، اما اگر x صحیح نباشد، $\lceil x \rceil$ عدد صحیح بعدی آن است. مثلاً $\lceil 2 \rceil = 2$ و $\lceil 4/3 \rceil = 5$.

یک‌جور دیگر هم می‌توانیم بگوییم: $\lceil x \rceil = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر از } x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$



تست ۲۴ توریست را می‌خواهیم با تاکسی‌هایی که هر کدام، حداکثر ظرفیت ۴ مسافر را دارند، از فرودگاه به هتل ببریم و در اتاق‌هایی که در هر کدام از آن‌ها، حداکثر ۳ نفر را می‌توان جا داد، اسکان دهیم. به ترتیب به چند تاکسی و چند اتاق نیازمندیم؟

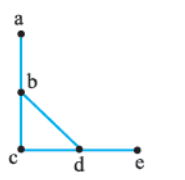
- ۱۲-۹ (۴) ۱۱-۹ (۳) ۱۲-۸ (۲) ۱۱-۸ (۱)

$$\lceil \frac{34}{4} \rceil = 9$$

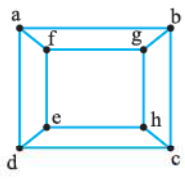
پاسخ گزینه ۲: در هر دو حالت باید از مفهوم سقف استفاده کنیم.

در واقع دارد می‌گوید که اگر ۸ تاکسی بگیریم، حداکثر ۳۲ مسافر را می‌توان جابه‌جا کرد و ۲ مسافر باقی می‌ماند، بنابراین به ۹ تاکسی نیازمندیم. از طرفی $\lceil \frac{34}{3} \rceil = 12$ ، پس اگر ۱۱ اتاق برای جادادن توریست‌ها در نظر بگیریم، چون ظرفیت هر اتاق، ۳ نفر است، در ۱۱ اتاق، حداکثر ۳۳ توریست را می‌توانیم جا بدهیم، بنابراین احتیاج به ۱۲ اتاق داریم؛ پس **۴** درست است.

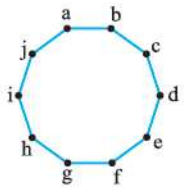
کران پایین $\gamma(G)$: گراف روبه‌رو را در نظر بگیرید.



Δ یا درجه بزرگ‌ترین رأس در این گراف، برابر ۳ است و رأس‌های b و d از درجه ۳ هستند. می‌دانیم در هر گراف، هر رأس، خودش و تمام همسایه‌هایش را احاطه می‌کند. مثلاً رأس b که بزرگ‌ترین درجه را دارد، رأس‌های $\{a, b, c, d\}$ را احاطه می‌کند. از طرف دیگر، این گراف ۵ رأس دارد. بنابراین با فقط یک رأس، نمی‌توان کل رأس‌های گراف را احاطه کرد. (چون گراف ۵ رأس دارد و رأسی که بزرگ‌ترین درجه را دارد، حداکثر می‌تواند ۴ رأس را احاطه کند. (با خودش حساب کردیم ۴ رأس)) حالا گراف روبه‌رو که تعداد رأس‌های بیشتری دارد، در نظر بگیرید. در این گراف $p = 8$ و $\Delta = 3$ است. اگر بخواهیم که یک مجموعه احاطه‌گر داشته باشیم، باید هر ۸ رأس احاطه شوند، اما با توجه به این که $\Delta = 3$ است، هر رأس در نهایت چهار رأس را احاطه می‌کند، خودش و سه رأس همسایه‌اش. (مثلاً رأس g ، رأس‌های g, h, b, f را احاطه می‌کند). بنابراین برای احاطه کردن ۸ رأس، به دست کم $\frac{8}{4} = 2$ رأس نیاز داریم. برای مثال در این گراف، $\{g, d\}$ ، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است. به یک مثال دیگر توجه کنید:



در گراف روبه‌رو $p = 10$ و $\Delta = 2$ است، یعنی هر رأس می‌تواند حداکثر ۳ رأس را احاطه کند، خودش و دو رأس همسایه‌اش. (مثلاً رأس a فقط رأس‌های $\{a, b, j\}$ را احاطه می‌کند). حالا با توجه به این که تعداد رأس‌های گراف، ۱۰ تا است، برای آن که هر ۱۰ رأس احاطه شود و از آن جایی که هر رأس، حداکثر می‌تواند سه رأس را احاطه کند، برای داشتن یک مجموعه احاطه‌گر، به دست کم $\lceil \frac{10}{3} \rceil = 4$ رأس برای احاطه همه رئوس نیازمندیم. (برای مثال $\{a, d, g, i\}$ ، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است.)



همان‌طور که در این سه مثال دیدیم، اگر بزرگ‌ترین درجه Δ باشد، آن رأس یا رأس‌هایی که درجه Δ دارند، می‌توانند $\Delta + 1$ رأس را احاطه کنند و اگر گراف دارای n رأس باشد، برای احاطه همه رئوس، به حداقل $\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \rceil$ رأس نیازمندیم و در واقع $\gamma(G)$ باید بزرگ‌تر یا مساوی این عدد باشد. اگر G ، یک گراف n رأسی با ماکسیمم درجه Δ و D ، یک مجموعه احاطه‌گر باشد، آن‌گاه $|D| \leq \lceil \frac{n}{\Delta + 1} \rceil$ یا به بیان دیگر $\gamma(G) \leq \lceil \frac{n}{\Delta + 1} \rceil$ (به اصطلاح گفته می‌شود که عدد $\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \rceil$ ، یک کران پایین برای $\gamma(G)$ است.)

تست در گرافی از مرتبه ۱۵ می‌دانیم که درجه بزرگ‌ترین رأس، برابر ۳ است. حداکثر تعداد رأس‌هایی که یک رأس در این گراف احاطه می‌کند، برابر و با کم‌تر از رأس، نمی‌توان همه رئوس را احاطه کرد.

- ۵-۴ (۴) ۴-۴ (۳) ۵-۳ (۲) ۴-۳ (۱)

پاسخ گزینه ۳: چون در این گراف، درجه بزرگ‌ترین رأس، برابر ۳ است، بنابراین یک رأس از درجه Δ ، تعداد $(\Delta + 1)$ رأس را احاطه می‌کند. (خودش و رأس‌های همسایه‌اش).

$$\gamma(G) \geq \lceil \frac{15}{4} \rceil = 4$$

از طرفی با توجه به این که $\gamma(G) \geq \lceil \frac{n}{\Delta + 1} \rceil$ ، داریم:

پس دست کم به ۴ رأس، برای احاطه کردن همه رئوس گراف نیازمندیم. بنابراین پاسخ درست، **۳** است؛ زیرا با کم‌تر از ۴ رأس، نمی‌توانیم همه رئوس را احاطه کنیم.

فصل ششم گراف و مدل‌سازی

تست عدد احاطه‌گری P_V کدام است؟



- ۲ (۱)
- ۳ (۲)
- ۴ (۳)
- ۵ (۴)

پاسخ گزینه ۲: گراف P_V به صورت مقابل است:

با توجه به رابطه $\gamma(G) \geq \left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$ و با توجه به این که در P_V ، $\Delta = 2$ است، داریم:

$$\gamma(G) \geq \left\lfloor \frac{7}{3} \right\rfloor \Rightarrow \gamma(G) \geq 2$$

اما آیا می‌توانیم با سه رأس، یک مجموعه احاطه‌گر داشته باشیم؟ بله، برای مثال $\{V_2, V_5, V_7\}$ ، یک مجموعه است.

تست $\gamma(G)$ در کدام‌یک از گراف‌های زیر با بقیه متفاوت است؟



- P_9 (۳)
- C_8 (۲)
- P_V (۱)
- C_{10} (۴)

پاسخ گزینه ۲: گفتیم $\gamma(G) \geq \left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$ و از طرفی در همه گراف‌های P_V ، C_8 ، P_9 و C_{10} ، درجه بزرگ‌ترین رأس برابر ۲ است. بنابراین:

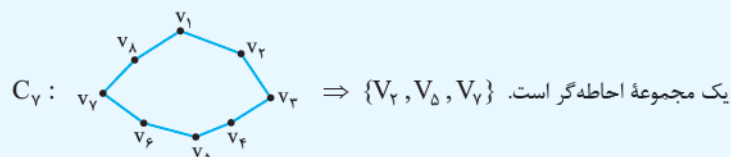
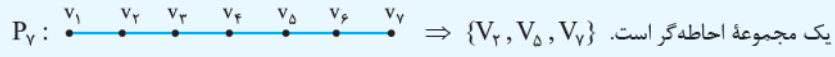
$$P_V \text{ در } \Rightarrow \gamma(G) \geq \left\lfloor \frac{9}{3} \right\rfloor \Rightarrow \gamma(G) \geq 3$$

$$C_8 \text{ در } \Rightarrow \gamma(G) \geq \left\lfloor \frac{8}{3} \right\rfloor \Rightarrow \gamma(G) \geq 2$$

$$P_9 \text{ در } \Rightarrow \gamma(G) \geq \left\lfloor \frac{9}{3} \right\rfloor \Rightarrow \gamma(G) \geq 3$$

$$C_{10} \text{ در } \Rightarrow \gamma(G) \geq \left\lfloor \frac{10}{3} \right\rfloor \Rightarrow \gamma(G) \geq 3$$

در هر سه گراف P_V ، C_8 و P_9 ، عدد احاطه‌گری برابر ۳ است. برای مثال:



اما عدد احاطه‌گری C_{10} ، حداقل برابر ۴ است. اگر شبیه بالا عمل کنیم، مجموعه احاطه‌گر ۴ عضوی، برای C_{10} هم پیدا می‌شود، پس $\gamma(C_{10}) = 4$ شده و با بقیه متفاوت است.

در گراف‌های C_n و P_n ، عدد احاطه‌گری برابر است با: $\gamma(C_n) = \gamma(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$

تست در گراف روبه‌رو، $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$ برابر و عدد احاطه‌گری، برابر است.



- ۳-۲ (۱)
- ۴-۲ (۲)
- ۴-۳ (۳)
- ۴-۳ (۴)

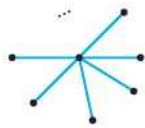
پاسخ گزینه ۲: با توجه به این که این گراف، ۱۰ رأس دارد و Δ در آن برابر ۳ است، حاصل $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$ برابر، $\left\lfloor \frac{10}{4} \right\rfloor = 2$ می‌باشد. از بین a و b و f، حداقل یکی باید انتخاب شود، که بهتر است b باشد. از بین f و j هم حداقل یکی باید انتخاب شود، که بهتر است f باشد. برای این که همه رأس‌های دیگر احاطه شود، باید حداقل دو رأس d و g (یا h) را نیز اضافه کنیم، پس $\gamma(G) = 4$ می‌شود.

تست در گرافی از مرتبه ۷ می‌دانیم که $\gamma(G) = 1$ است. این گراف دست‌کم چند یال دارد؟



- ۵ (۱)
- ۶ (۲)
- ۷ (۳)
- ۸ (۴)

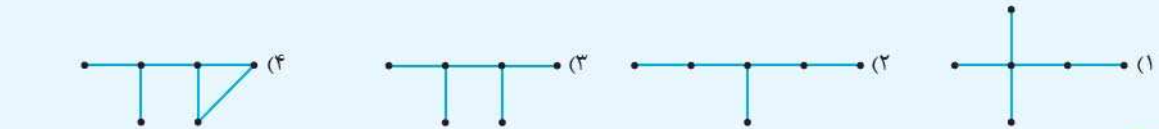
پاسخ گزینه ۲: وقتی $\gamma(G) = 1$ است، یعنی دست‌کم یک رأس وجود دارد که همه رأس‌های دیگر را احاطه می‌کند و به بیان دیگر، به همه رأس‌های دیگر وصل است: چنین گرافی دست‌کم دارای ۶ یال خواهد بود، بنابراین ۲ درست است.



اگر در گرافی n رأسی، $\gamma(G) = 1$ باشد، گراف دست کم $(n-1)$ یال دارد و به صورت روبه‌رو (یک درخت ستاره‌ای) است.

اگر $\gamma(G) = 1$ باشد، حداکثر تعداد یال‌ها وقتی به دست می‌آید که گراف کامل باشد، پس حداکثر یال‌ها برابر $\frac{n(n-1)}{2}$ می‌شود.

تست در کدام یک از گراف‌های زیر، فقط یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم با عدد احاطه‌گری ۲ وجود دارد؟

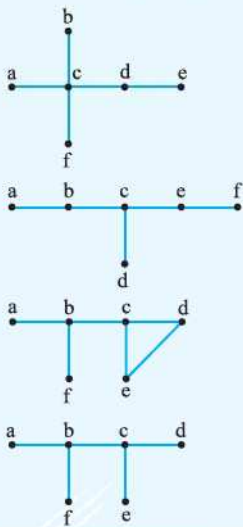


پاسخ گزینه ۳ گفته فقط یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم داشته باشیم، یعنی مجموعه احاطه‌گر، یکتا باشد. در گراف داده‌شده در (۱) مجموعه‌های $\{c, d\}$ و $\{c, e\}$ دو مجموعه احاطه‌گر مینیمم هستند.

در گراف داده‌شده در (۲) مجموعه احاطه‌گر مینیمم، دست کم سه عضو دارد (مثلاً $\{b, e, c\}$).

در گراف داده‌شده در (۴) نیز، مجموعه احاطه‌گر مینیمم با عدد احاطه‌گری ۲، یکتا نیست. برای مثال؛ مجموعه‌های $\{b, c\}$ ، $\{b, d\}$ و $\{b, e\}$ - مجموعه‌اند.

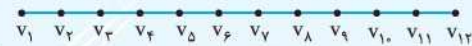
اما در گراف داده‌شده در (۳)، فقط مجموعه $\{b, c\}$ ، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم با عدد احاطه‌گری ۲ است.



تست در گراف P_{11} ، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال، حداکثر چند عضو دارد؟

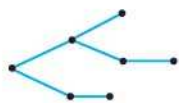
- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

پاسخ گزینه ۴ در این گراف، مجموعه $\{V_3, V_5, V_8, V_{11}\}$ ، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم (*Set Cover* میریم) است، اما اگر بخواهیم مجموعه احاطه‌گر مینیمال، تعداد عضوهای بیشتری داشته باشد، برای مثال؛ مجموعه $\{V_1, V_3, V_5, V_7, V_9, V_{11}\}$ ، یک مجموعه مینیمال ۶ عضوی است که حداکثر عضو را دارد؛ (یکی در میون میریم جلو)، پس (۴) درست است.



به گراف همبندی که دور نداشته باشد، درخت می‌گویند.

در هر درخت رابطه $q = p - 1$ برقرار است. مثلاً گراف مقابل یک درخت است:



تست در کدام یک از درخت‌های زیر، $\gamma(G)$ با بقیه فرق دارد؟

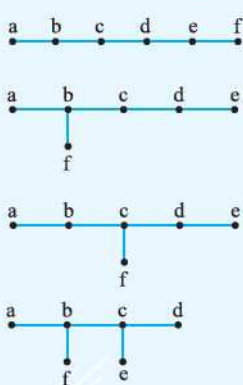


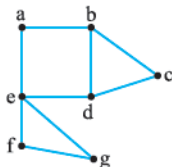
پاسخ گزینه ۳ در درخت داده‌شده در (۱) مجموعه $\{b, e\}$ ، یک مجموعه است، پس $\gamma(G) = 2$.

در درخت داده‌شده در (۲) مجموعه $\{b, e\}$ ، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است؛ یعنی $\gamma(G) = 2$.

در درخت داده‌شده در (۳) مجموعه احاطه‌گر مینیمم، دست کم سه عضو دارد؛ از طرفی $\{b, c, d\}$ احاطه‌گر بوده، پس: $\gamma(G) = 3$.

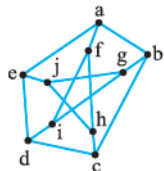
در درخت داده‌شده در (۴) نیز، مجموعه $\{b, c\}$ ، یک مجموعه است، یعنی $\gamma(G) = 2$ ؛ بنابراین پاسخ (۳) است.





۱۱۰۶- کدام یک از مجموعه‌های زیر برای گراف روبه‌رو، احاطه‌گر نیست؟

- (۱) $\{e, d\}$
- (۲) $\{b, f\}$
- (۳) $\{g, d\}$
- (۴) $\{c, e\}$



۱۱۰۷- کدام مجموعه برای گراف مقابل، احاطه‌گر نیست؟

- (۱) $\{a, b, c, d, e\}$
- (۲) $\{a, i, h\}$
- (۳) $\{f, g, h, e\}$
- (۴) $\{b, c, j, d\}$

۱۱۰۸- در گرافی از مرتبه‌ی ۱۳ می‌دانیم که درجه رأس a برابر ۵ است. چند رأس این گراف توسط a احاطه نمی‌شود؟

- (۱) ۶
- (۲) ۷
- (۳) ۸
- (۴) نمی‌توان گفت.

۱۱۰۹- یک وزیر را در یک صفحه شطرنج قرار می‌دهیم. حداکثر چند مربع از ۶۳ مربع باقی‌مانده، توسط این وزیر، پوشش داده می‌شود؟

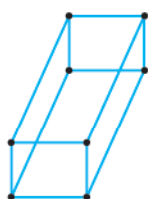
- (۱) ۲۵
- (۲) ۲۶
- (۳) ۲۷
- (۴) ۲۸

۱۱۱۰- اگر $[2a] = 3$ و $[3a] = 5$ باشد، کدام گزینه درست است؟

- (۱) $\frac{4}{3} < a \leq 2$
- (۲) $\frac{4}{3} < a \leq \frac{5}{3}$
- (۳) $\frac{4}{3} \leq a \leq 2$
- (۴) $\frac{4}{3} \leq a \leq \frac{5}{3}$

۱۱۱۱- تعدادی از کارکنان یک شرکت فرار است که با تعدادی تاکسی به محلی بروند. هر ۴ نفر به یک تاکسی نیاز دارند و هزینه هر تاکسی، ۳۵ هزار تومان است. اگر کل پول پرداخت‌شده توسط شرکت برای تاکسی‌ها، ۴۵۵ هزار تومان باشد، تعداد کارکنانی که سوار تاکسی شده‌اند، دست‌کم چند نفر بوده است؟

- (۱) ۴۸
- (۲) ۴۹
- (۳) ۵۱
- (۴) ۵۲



۱۱۱۲- فرض کنید که گراف روبه‌رو، نشان‌دهنده یک شبکه متشکل از ۸ کامپیوتر است و یال بین هر دو رأس، نشان‌دهنده آن است که کامپیوترهای نظیر آن دو رأس، با هم در ارتباط هستند. با انتخاب دست‌کم چند کامپیوتر، می‌توان به همه کامپیوترهای این شبکه وصل شد؟

- (۱) ۲
- (۲) ۳
- (۳) ۴
- (۴) ۵

۱۱۱۳- برای احاطه‌کردن همه رأس‌های یک گراف ۳-منظم از مرتبه ۲۲، کدام عدد، یک کران پایین برای $\gamma(G)$ است؟

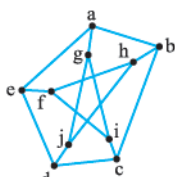
- (۱) ۵
- (۲) ۶
- (۳) ۷
- (۴) ۸

۱۱۱۴- به ازای کدام مقدار m و n ، گزاره: «تعداد کم‌تر از m رأس، نمی‌توانند تمام n رأس یک گراف که در آن $\Delta = 4$ است را احاطه کند»، درست است؟

- (۱) $m = 6$ و $n = 24$
- (۲) $m = 9$ و $n = 34$
- (۳) $m = 10$ و $n = 44$
- (۴) $m = 11$ و $n = 54$

۱۱۱۵- مجموعه $\{f, g\}$ با کدام یک از مجموعه‌های زیر، تشکیل یک γ -مجموعه برای گراف روبه‌رو می‌دهند؟

- (۱) $\{b, d\}$
- (۲) $\{b, c\}$
- (۳) $\{c, f\}$
- (۴) $\{d, f\}$

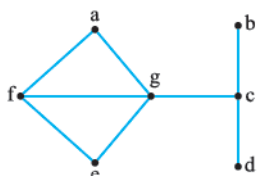


۱۱۱۶- در گراف G از مرتبه ۱۰، $\delta = 6$ است. کدام گزینه در مورد عدد احاطه‌گری گراف مکمل G ، درست است؟ (بهترین کران پایین موردنظر است.)

- (۱) $\gamma(\bar{G}) \geq 1$
- (۲) $\gamma(\bar{G}) \geq 2$
- (۳) $\gamma(\bar{G}) \geq 3$
- (۴) $\gamma(\bar{G}) \geq 4$

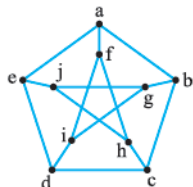
۱۱۱۷- برای گراف روبه‌رو، کدام گزینه یک γ -مجموعه است؟

- (۱) $\{a, b, d, e\}$
- (۲) $\{a, e, c\}$
- (۳) $\{c, g\}$
- (۴) $\{f, g, d\}$



۱۱۱۸- از مجموعه احاطه‌گر $\{b, c, d, e, f, g, h\}$ برای گراف زیر، حداکثر چند عضو می‌توان حذف کرد که مجموعه باقی‌مانده، هنوز احاطه‌گر باشد؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴



۱۱۱۹- در کدام یک از گراف های زیر، $\gamma(G)$ برابر ۳ است؟



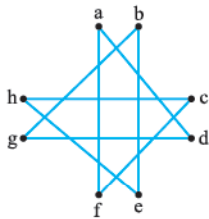
۱۱۲۰- در یک گراف ۳- منتظم از مرتبه n ، می دانیم که $\gamma(G) = 7$ است. n برابر کدام یک از عددهای زیر می تواند باشد؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۱ (۴) ۱۴

۱۱۲۱- در گراف G از مرتبه ۱۲ داریم $\Delta = 6$. کدام گزینه درست است؟

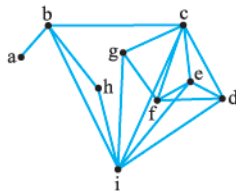
- (۱) $2 \leq \gamma(G) \leq 6$ (۲) $2 \leq \gamma(G) \leq 5$ (۳) $3 \leq \gamma(G) \leq 6$ (۴) $3 \leq \gamma(G) \leq 5$

۱۱۲۲- عدد احاطه گری گراف مقابل کدام است؟



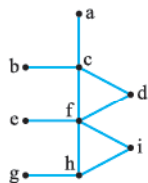
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۱۲۳- در گراف روبه رو، $\gamma(G)$ کدام است؟



- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۱۲۴- کدام یک از یال های زیر به گراف روبه رو اضافه شود تا $\gamma(G) = 2$ بشود؟



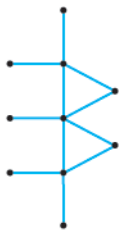
- (۱) eg (۲) eh (۳) id (۴) ie

۱۱۲۵- در گراف روبه رو، چند γ - مجموعه وجود دارد؟



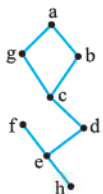
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸

۱۱۲۶- برای گراف مقابل، $\gamma(G)$ برابر با کدام است؟



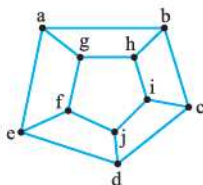
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۱۲۷- عدد احاطه گری گراف مقابل کدام است؟



- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

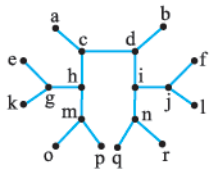
۱۱۲۸- برای گراف روبه رو، $\gamma(G)$ برابر کدام است؟



- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

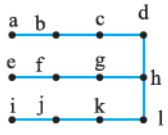
۱۱۲۹- $\gamma(G)$ برای گراف روبه‌رو کدام است؟

- ۳ (۱)
- ۴ (۲)
- ۵ (۳)
- ۶ (۴)



۱۱۳۰- عدد احاطه‌گری گراف مقابل کدام است؟

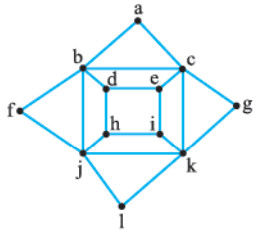
- ۲ (۱)
- ۴ (۳)



- ۳ (۲)
- ۵ (۴)

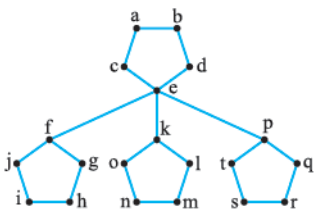
۱۱۳۱- مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمم برای گراف روبه‌رو چند عضو دارد؟

- ۲ (۱)
- ۳ (۲)
- ۴ (۳)
- ۵ (۴)



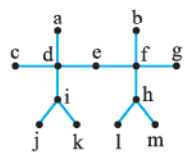
۱۱۳۲- عدد احاطه‌گری گراف روبه‌رو کدام است؟

- ۶ (۱)
- ۷ (۲)
- ۸ (۳)
- ۹ (۴)



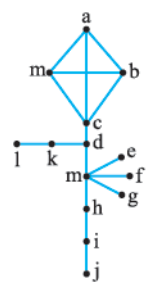
۱۱۳۳- در گراف روبه‌رو، $\gamma(G)$ کدام است؟

- ۳ (۱)
- ۴ (۲)
- ۵ (۳)
- ۶ (۴)



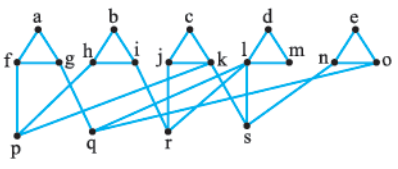
۱۱۳۴- عدد احاطه‌گر گراف مقابل کدام است؟

- ۲ (۱)
- ۳ (۲)
- ۴ (۳)
- ۵ (۴)



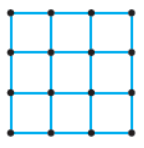
۱۱۳۵- عدد احاطه‌گری گراف روبه‌رو، کدام است؟

- ۵ (۱)
- ۶ (۲)
- ۷ (۳)
- ۸ (۴)



۱۱۳۶- عدد احاطه‌گر گراف روبه‌رو کدام است؟

- ۳ (۱)
- ۵ (۳)



- ۴ (۲)
- ۶ (۴)

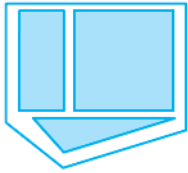
۱۱۳۷- در گراف همبند فاقد دور n راسی، اگر $\Delta = n - 2$ باشد:

$\gamma(G) = 1$ (۱) است.

$\gamma(G) = 2$ (۲) است.

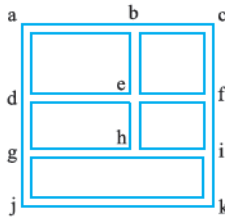
(۳) یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال حداکثر $n - 1$ رأس دارد.

(۴) یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال حداکثر $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ رأس دارد.



۱۱۳۸- اگر شکل روبه‌رو، نقشه‌ی قسمتی از یک شهر باشد، دست‌کم چند خودپرداز در برخی از تقاطع‌ها نصب کنیم که هر فرد، در هر تقاطعی که باشد، یا به دستگاه خودپرداز دسترسی داشته باشد و یا حداکثر با رفتن به یک تقاطع مجاور، به دستگاه خودپرداز دسترسی پیدا کند؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)



۱۱۳۹- فرض کنید که شکل روبه‌رو نقشه‌ی قسمتی از یک شهر باشد. می‌خواهیم تعدادی خودپرداز در برخی از تقاطع‌های این خیابان‌ها نصب کنیم که هر فرد در هر تقاطعی که باشد یا به دستگاه خودپرداز دسترسی داشته باشد و یا حداکثر با رفتن به یک تقاطع مجاور، به دستگاه خودپرداز دسترسی پیدا کند. اگر یکی از خودپردازها را در چهارراه e نصب کنیم، دست‌کم چند خودپرداز دیگر نیاز داریم؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

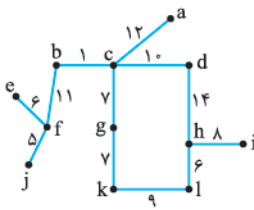
	A	B	C	D	E	F
A	۰	۴۰	۷۰	۱۰۰	۹۰	۴۵
B	۴۰	۰	۳۰	۱۲۰	۱۱۰	۸۰
C	۷۰	۳۰	۰	۷۰	۷۵	۹۰
D	۱۰۰	۱۲۰	۷۰	۰	۲۵	۶۰
E	۹۰	۱۱۰	۷۵	۲۵	۰	۲۰
F	۴۵	۸۰	۹۰	۶۰	۲۰	۰

۱۱۴۰- فرض کنید A, B, C, D, E, F شهرهای یک استان باشند و فاصله‌های مستقیم این شهرها در جدول روبه‌رو آمده باشد. می‌خواهیم تعدادی ایستگاه رادیویی در برخی از شهرهای این استان بنا کنیم، به طوری که تمام شهرهای استان، تحت پوشش قرار گیرد. اگر هر ایستگاه تا ۵۰ کیلومتر اطراف خود را پوشش دهد، حداقل به چند ایستگاه رادیویی نیاز داریم؟

- ۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴)

۱۱۴۱- نقشه‌ی روبه‌رو، نقشه‌ی یک منطقه شامل چند روستا است و مسافت جاده‌های بین آن‌ها، مشخص شده است. می‌خواهیم چند درمانگاه در برخی از این روستاها احداث کنیم، به گونه‌ای که فاصله‌ی هر روستا تا نزدیک‌ترین درمانگاه، بیشتر از ۲۰ کیلومتر نباشد و از طرفی، کم‌ترین درمانگاه را ایجاد کنیم. با توجه به نقشه‌ی فوق، به دست‌کم چند درمانگاه نیاز مندیم؟

- ۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴)



۱۱۴۲- در کدام یک از گراف‌های زیر، γ - مجموعه، یکتا است؟

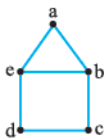


۱۱۴۳- در گراف G می‌دانیم، $\gamma(G)$ برابر ۲ و A یک مجموعه‌ی احاطه‌گر ۳ عضوی و B یک مجموعه‌ی احاطه‌گر ۴ عضوی مینیمال است. در این صورت:

- (۱) با برداشتن هر عضو A و B، هیچ کدام از این مجموعه‌های باقی‌مانده، دیگر احاطه‌گر نیستند.
- (۲) با برداشتن هر عضو A، مجموعه باقی‌مانده احاطه‌گر نیست، اما می‌توان یک عضو از B حذف کرد و مجموعه باقی‌مانده هنوز احاطه‌گر باشد.
- (۳) ممکن است از A یک عضو حذف کنیم و مجموعه باقی‌مانده هنوز احاطه‌گر باشد، ولی اگر هر عضوی از B برداریم، مجموعه باقی‌مانده، دیگر احاطه‌گر نیست.
- (۴) ممکن است از هر کدام از مجموعه‌های A و B بتوانیم یک عضو برداریم و مجموعه‌های باقی‌مانده هنوز احاطه‌گر باشد.

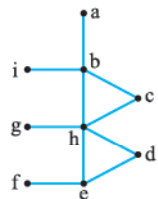
۱۱۴۴- در گراف روبه‌رو، یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال، حداکثر چند عضو دارد؟

- ۲ (۱) ۳ (۲)
۴ (۳) ۵ (۴)



۱۱۴۵- یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال، برای گراف روبه‌رو، حداکثر چند عضو دارد؟

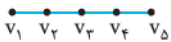
- ۳ (۱)
۴ (۲)
۵ (۳)
۶ (۴)



۱۱۴۶- کدام گزینه درست است؟

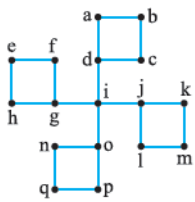
- (۱) هر مجموعه‌ی احاطه‌گر دلخواه را با حذف برخی از رئوس می‌توان به یک γ - مجموعه تبدیل کرد.
- (۲) هر مجموعه‌ی احاطه‌گر دلخواه را با حذف برخی از رئوس می‌توان به یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال تبدیل کرد.
- (۳) هر مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال را با حذف برخی از رئوس می‌توان به یک γ - مجموعه تبدیل کرد.
- (۴) اگر A یک γ - مجموعه و B یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال باشد، $A - B$ برابر تهی است.

۱۱۴۷- در گراف زیر، اگر A یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال و $V_7 \in A$ ، در این صورت A دارای عضو است و یک γ - مجموعه باشد.



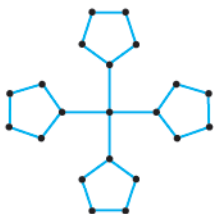
- (۱) ۲ - می‌تواند
- (۲) ۲ - نمی‌تواند
- (۳) ۳ - می‌تواند
- (۴) ۳ - نمی‌تواند

۱۱۴۸- اگر A یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال برای گراف روبه‌رو باشد، به طوری که $i \notin A$ ، در این صورت A :



- (۱) ۸ عضوی است.
- (۲) ۸ یا ۹ عضوی است.
- (۳) ۹ عضوی است.
- (۴) ۵ عضوی است.

۱۱۴۹- یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال برای گراف روبه‌رو، حداکثر چندعضوی است؟



- (۱) ۸
- (۲) ۹
- (۳) ۱۰
- (۴) ۱۲

۱۱۵۰- در گراف همبند فاقد دور از مرتبهٔ ۷ می‌دانیم $\Delta = 5$ است. یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال در این گراف، حداکثر چند عضو دارد؟

- (۱) ۲
- (۲) ۳
- (۳) ۴
- (۴) ۵

۱۱۵۱- در گراف ۲ - منتظم همبند از مرتبهٔ ۲۳، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم، چند عضو دارد؟

- (۱) ۵
- (۲) ۶
- (۳) ۷
- (۴) ۸

۱۱۵۲- اگر عدد احاطه‌گری گراف C_n برابر ۷ باشد، عدد احاطه‌گری گراف P_n :

- (۱) قطعاً برابر ۷ است.
- (۲) برابر ۷ یا ۸ است.
- (۳) برابر ۶ یا ۷ است.
- (۴) قطعاً برابر ۸ است.

۱۱۵۳- در گراف ۲ - منتظم اندازهٔ ۸، چند مقدار مختلف برای عدد احاطه‌گری ممکن است وجود داشته باشد؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

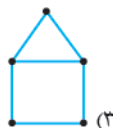
۱۱۵۴- عدد احاطه‌گری گراف k - منتظم از مرتبهٔ ۸ و اندازهٔ ۲۴ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۱ یا ۲
- (۴) اطلاعات کافی نیست.

۱۱۵۵- در گراف C_n ، عدد احاطه‌گری برابر ۱۱ و در گراف P_{n+2} نیز، عدد احاطه‌گری برابر ۱۱ است. n کدام است؟

- (۱) ۳۰
- (۲) ۳۱
- (۳) ۳۰ یا ۳۱
- (۴) ۳۱ یا ۳۲

۱۱۵۶- در کدام گراف، عدد احاطه‌گری با $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$ برابر نیست؟



(۳)



(۲)



(۱)



(۴)



۱۱۵۷- عدد احاطه‌گری گراف روبه‌رو کدام است؟

- (۱) ۳
- (۲) ۴
- (۳) ۵
- (۴) ۶

۱۱۵۸- یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال برای گراف P_{17} ، حداکثر چند عضو دارد؟

- (۱) ۶
- (۲) ۷
- (۳) ۸
- (۴) ۹

۱۱۵۹- در گراف G از مرتبهٔ ۸ می‌دانیم $\gamma(G) = 1$ است. اختلاف حداقل و حداکثر تعداد یال‌های گراف G کدام است؟

- (۱) ۱۸
- (۲) ۱۹
- (۳) ۲۰
- (۴) ۲۱

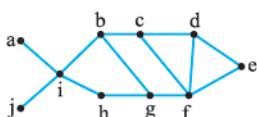
۱۱۶۰- گراف G از مرتبهٔ ۹ و $\gamma(G) = 2$ است. حداکثر اندازهٔ گراف کدام است؟

- (۱) ۳۱
- (۲) ۳۲
- (۳) ۵۰
- (۴) ۵۵

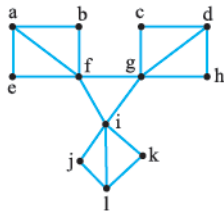
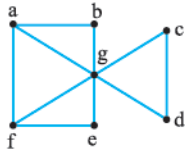
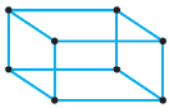
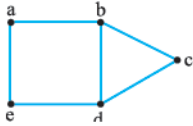
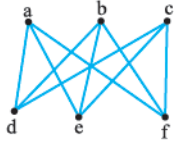
۱۱۶۱- در گراف G از مرتبهٔ ۹ می‌دانیم $\gamma(G) = 1$ و گراف ۱۰ یال دارد. اگر گراف، ۲ دور داشته باشد، تعداد رأس‌های درجهٔ ۱ در آن چندان است؟

- (۱) ۴
- (۲) ۵
- (۳) ۶
- (۴) نمی‌توان گفت.

۱۱۶۲- عدد احاطه‌گری گراف روبه‌رو، برابر و این گراف γ - مجموعه دارد.



- (۱) ۱-۲
- (۲) ۲-۲
- (۳) ۱-۳
- (۴) ۲-۳



۱۱۶۳- در گراف روبه‌رو چند γ - مجموعه وجود دارد؟

- ۴ (۱)
- ۶ (۲)
- ۹ (۳)
- ۱۲ (۴)

۱۱۶۴- گراف روبه‌رو چند γ - مجموعه متمایز دارد؟

- ۶ (۱)
- ۷ (۲)
- ۸ (۳)
- ۹ (۴)

۱۱۶۵- گراف مقابل چند γ - مجموعه دارد؟

- ۲ (۱)
- ۴ (۲)
- ۶ (۳)
- ۸ (۴)

۱۱۶۶- گراف روبه‌رو چند مجموعه احاطه‌گر ۲ عضوی دارد؟

- ۶ (۱)
- ۷ (۲)
- ۵ (۳)
- ۹ (۴)

۱۱۶۷- عدد احاطه‌گری گراف روبه‌رو برابر و این گراف دارای γ - مجموعه است.

- ۱-۳ (۱)
- ۸-۳ (۲)
- ۶-۳ (۳)
- ۳-۴ (۴)

۱۱۶۸- گراف P_5 چند γ - مجموعه متمایز دارد؟

- ۲ (۱)
- ۳ (۲)
- ۴ (۳)
- ۵ (۴)

۱۱۶۹- در گراف P_6 چند مجموعه احاطه‌گر ۴ عضوی وجود دارد؟

- ۹ (۱)
- ۱۱ (۲)
- ۱۳ (۳)
- ۱۵ (۴)

۱۱۷۰- در گراف C_6 چند مجموعه سه‌عضوی وجود دارد که احاطه‌گر نیستند؟

- ۱ (۱)
- ۳ (۲)
- ۶ (۳)
- ۱۵ (۴)

۱۱۷۱- گراف C_{15} چند مجموعه احاطه‌گر مینیمم ۵ عضوی دارد؟

- ۳ (۱)
- ۵ (۲)
- ۶ (۳)
- ۹ (۴)

۱۱۷۲- کدام گراف، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم یکتا دارد؟

- C_{12} (۱)
- P_{12} (۲)
- C_{13} (۳)
- P_{13} (۴)

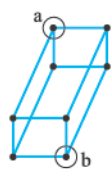
۱۱۷۳- کدام گراف همبند با شرایط زیر وجود ندارد؟

- (۱) مرتبه ۹ که $\gamma = 2$ باشد.
- (۲) مرتبه ۹ که $\gamma = 3$ باشد.
- (۳) مرتبه ۹ که $\gamma = 4$ باشد.
- (۴) هر سه گزینه وجود دارد.

تاکسی آخر شده باشد. به عبارت دیگر، حداقل ۴۹ نفر سوار تاکسی شده‌اند. حالا چه ربطی به این جا داشت؟ ببینید در واقع اگر تعداد افراد را n بگیریم:

$$\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor = 13 \Rightarrow 12 < \frac{n}{4} \leq 13 \xrightarrow{\times 4} 48 < n \leq 52$$

پس حداقل n برابر ۴۹ بوده است.



۱۱۱۲- **گزینه ۱** باید مجموعه احاطه‌گر مینیمم را

$$\gamma(G) \geq \left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{8}{3+1} \right\rfloor = 2$$

است. از طرفی مجموعه $\{a, b\}$ ، کل رأس‌های دیگر را احاطه می‌کند، پس $\gamma(G) = 2$ می‌شود.

۱۱۱۳- **گزینه ۲** قضیه می‌گوید که در گراف n رأسی، $\gamma(G) \geq \left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$

است. حالا همه رأس‌ها از درجه ۳ هستند، پس $\Delta = 3$ می‌شود.

$$\gamma(G) \geq \left\lfloor \frac{22}{4} \right\rfloor = \left\lfloor 5.5 \right\rfloor = 5$$

۱۱۱۴- **گزینه ۲** قضیه‌ای داریم که کران پایین، برای عدد احاطه‌گری ارائه

می‌کند. این قضیه می‌گوید $\gamma(G) \geq \left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$ که n مرتبه گراف است، پس

$$\gamma(G) \geq \left\lfloor \frac{n}{4+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor$$

۱ $\gamma(G) \geq \left\lfloor \frac{24}{5} \right\rfloor = 4$ پس با کم‌تر از $m = 6$ رأس، ممکن است

احاطه شود، یعنی مثلاً $\gamma(G) = 5$ بوده باشد.

۲ $\gamma(G) \geq \left\lfloor \frac{34}{5} \right\rfloor = 6$ پس با کم‌تر از $m = 9$ رأس، ممکن است

احاطه شود. (مثلاً با ۷ یا ۸ تا!)

۳ $\gamma(G) \geq \left\lfloor \frac{44}{5} \right\rfloor = 8$ پس با کم‌تر از $m = 10$ رأس، یعنی مثلاً ۹

رأس، ممکن است احاطه شود.

۴ $\gamma(G) \geq \left\lfloor \frac{54}{5} \right\rfloor = 10$ می‌شود، یعنی با کم‌تر از $m = 11$ رأس، قطعاً

نمی‌تواند همه رأس‌ها احاطه شود، پس همین گزینه می‌شود پاسخ!

۱۱۱۵- **گزینه ۲** گراف از مرتبه $n = 10$ بوده و $\Delta = 3$ است، پس

$$\gamma(G) \geq \left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{10}{4} \right\rfloor = 2$$

احاطه‌گر است، پس $\gamma(G) = 3$ می‌شود. اجتماع مجموعه $\{f, g\}$ با گزینه درست، باید ۳ عضو پیدا کند (تا γ - مجموعه شود). این یعنی با گزینه درست، در یک رأس اشتراک داشته باشد، یعنی ۱ و ۲ غلط هستند.

$$\{f, g\} \cup \{c, f\} = \{f, g, c\} \quad \text{اما} \quad \text{۳}$$

این مجموعه احاطه‌گر، ۳ رأسی است، پس همین گزینه جواب است.

۴ نیست توجه کنید که $\{f, d, g\}$ ، رأس b را احاطه نمی‌کند، پس ۴ هم نادرست است.

۱۱۱۶- **گزینه ۲** مجموع درجه یک رأس در خود گراف و گراف مکمل،

برابر $p-1$ می‌شود. فرض کنیم $\deg_G(a) = \delta = 6$ باشد، پس:

$$\deg_G(a) + \deg_{\bar{G}}(a) = p-1 = 9 \Rightarrow \deg_{\bar{G}}(a) = 3$$

۱۱۰۶- **گزینه ۳** رأس a ، نه به g وصل است و نه به d پس ۳، کل

رأس‌ها را احاطه نمی‌کند. در بقیه مجموعه‌ها، مجموعه همسایه‌های هر رأس و خود رأس‌ها، کل گراف را پوشش می‌دهد، پس همگی احاطه‌گر هستند. مثلاً: $N_G[d] = \{b, c, e\}$ و $N_G[e] = \{f, g, a, d\}$

می‌بینید که اجتماع این دو مجموعه به همراه e و d ، کل رأس‌ها را پوشش می‌دهد.

۱۱۰۷- **گزینه ۲** رأس f ، به هیچ کدام از رأس‌های ۴ وصل نیست، پس

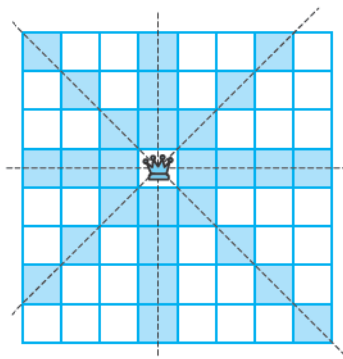
رأس‌های ۴، کل رأس‌های گراف را احاطه نمی‌کند.

۱۱۰۸- **گزینه ۲** خب a ، ۵ رأس را احاطه می‌کند (با یال پوشش وصل‌ان) و

خود آن هم یکی، پس $7 = 13 - (5+1)$ ، رأس را احاطه نمی‌کند.

۱۱۰۹- **گزینه ۳** هرچه وزیر در مربع‌های میانی قرار بگیرد، خانه‌های

بیشتری را پوشش (تهدید) می‌دهد. با توجه به شکل، حداکثر ۲۷ خانه می‌تواند پوشش داده شود.



۱۱۱۰- **گزینه ۲** $[X]$ همان کف X (جزء صحیح) و $\lceil X \rceil$ همان سقف X

است، یعنی اگر X غیر صحیح باشد، $[X]$ به پایین گرد می‌شود، ولی $\lceil X \rceil$ به بالا!

$$\lceil 2a \rceil = 3 \Rightarrow 3 \leq 2a < 4 \xrightarrow{+2} \frac{3}{2} \leq a < 2 \quad \text{حالا:}$$

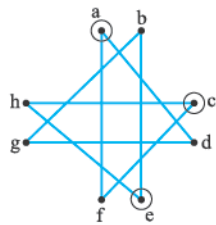
$$\lceil 3a \rceil = 5 \Rightarrow 4 < 3a \leq 5 \xrightarrow{+3} \frac{4}{3} < a \leq \frac{5}{3}$$

اشتراک بین این دو تا $\frac{3}{2} \leq a \leq \frac{5}{3}$ می‌شود.

۱۱۱۱- **گزینه ۲** با تقسیم ۴۵۵ بر ۳۵ می‌فهمیم که ۱۳ تاکسی اجاره شده

است. گفته حداقل چند نفر! ببینید $12 \times 4 = 48$ نفر که ۱۲ تاکسی را پر کرده‌اند، ولی در آخرین تاکسی ممکن است از یک تا ۴ نفر، سوار تاکسی شده باشند. چون حداقل افراد را می‌خواهیم، فرض می‌کنیم که فقط یک نفر سوار

هم خودش، پس با انتخاب رأس Δ ، دقیقاً γ رأس احاطه می‌شود. ۵ رأس دیگر باقی مانده است. همه آن‌ها به همراه Δ (یعنی γ رأس)، قطعاً کل رأس‌ها را احاطه می‌کنند، یعنی در بدترین شرایط، این گراف با ۶ رأس احاطه می‌شود، پس $\gamma(G) \leq 6$. خوب است بدانید همواره $\gamma(G) \leq n - \Delta$.



۱۱۲۲- گزینه ۲ گراف از مرتبه

$n = 8$ بوده و $\Delta = 2$ است، پس

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{8}{3} \right\rceil = 3$$

می‌شود. از طرفی مجموعه $\{a, c, e\}$ ، کل رأس‌های دیگر را احاطه می‌کند، پس $\gamma(G) = 3$ می‌شود.

۱۱۲۳- گزینه ۱ گراف از مرتبه $n = 9$ بوده و $\Delta = 6$ است، پس

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{9}{7} \right\rceil = 2$$

احاطه می‌کند، پس $\gamma(G) = 2$.

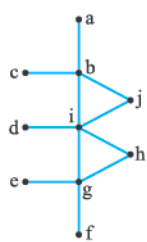
۱۱۲۴- گزینه ۲ کمی جستجو کنید! مجموعه $\{c, e, h\}$ ، کل رأس‌ها را

احاطه می‌کند، اما اگر یال eh را اضافه کنیم، کل رأس‌ها با دو رأس $\{c, h\}$ احاطه شده و $\gamma(G) = 2$ می‌شود.

۱۱۲۵- گزینه ۲ خیلی تابلو است. دوتا γ - مجموعه داریم که به صورت‌های زیر می‌توانند باشند:

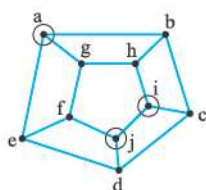


۱۱۲۶- گزینه ۲ $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{10}{5+1} \right\rceil = 2$ می‌شود، اما از بین



a, c, b حداقل یکی را باید بگیریم که بهتر است b باشد. از بین i و d هم یکی را باید بگیریم که i باشد، بهتر است. با همین استدلال، g را هم بهتر است بگیریم. مجموعه $\{b, i, g\}$ ، کل رأس‌ها را احاطه می‌کند، پس $\gamma(G) = 3$ می‌شود.

۱۱۲۷- گزینه ۲ از بین f, e, h حداقل یکی باید انتخاب کنیم که بهتر است e باشد. از بین چهارضلعی بالا هم، حداقل دو رأس باید انتخاب شود، پس $\gamma(G) = 3$.



۱۱۲۸- گزینه ۲ گراف از مرتبه

$n = 10$ بوده و $\Delta = 3$ است، پس

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{10}{4} \right\rceil = 3$$

از طرفی سه رأس $\{a, i, j\}$ ، کل رأس‌ها را احاطه می‌کنند، پس $\gamma(G) = 3$ می‌شود.

رأس a در خود گراف، دارای کم‌ترین درجه است، پس در گراف مکمل، بیشترین درجه را دارد، این یعنی Δ در گراف مکمل، برابر ۳ می‌شود. حالا در گراف \bar{G} داریم:

$$\gamma(\bar{G}) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{10}{3+1} \right\rceil = 3$$

۱۱۱۷- گزینه ۳ γ - مجموعه اصلاً یعنی چه؟ یعنی مجموعه‌ای که کل رأس‌های گراف را احاطه کند و دارای کم‌ترین تعداد عضو باشد. خوب طبق

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{7}{4+1} \right\rceil = 2$$

از طرفی $\{c, g\}$ ، کل رأس‌های دیگر را احاطه می‌کند، پس $\gamma(G) = 2$ می‌شود. بنابراین (۳) می‌تواند یک γ - مجموعه باشد.

۱۱۱۸- گزینه ۲ گراف داده‌شده (معروف به گراف پترسن)، ۳ - منتظم از

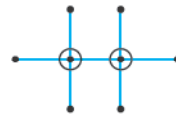
$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{10}{3+1} \right\rceil = 3$$

مرتبه ۱۰ است، پس: از طرفی مجموعه $\{c, h, g\}$ ، کل رأس‌های دیگر را احاطه می‌کند، پس $\gamma(G) = 3$ می‌شود، پس می‌توانیم رأس‌های b, c, d, f را با خیال راحت حذف کنیم، اما هم‌چنان مجموعه $\{e, h, g\}$ ، یک γ - مجموعه باشد.

۱۱۱۹- گزینه ۲ یکی یکی گزینه‌ها را برویم جلو:



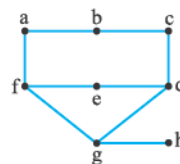
(۱) با دو رأس روبه‌رو، کل رأس‌ها احاطه می‌شود، پس $\gamma(G) = 2$ است.



(۲) این هم تابلو با دو رأس احاطه می‌شود، پس عدد احاطه‌گری، قطعاً ۳ نیست.



(۳) این هم مثل بالایی‌ها! پس لابد (۴) درست است.



با کمی جستجو می‌توان دریافت که با دو رأس، نمی‌توانیم کل رأس‌های دیگر را احاطه کنیم، ولی مثلاً $\{b, e, g\}$ ، کل رأس‌ها را احاطه می‌کند.

۱۱۲۰- گزینه ۲ برای احاطه‌شدن کل رأس‌ها، γ رأس نیاز است، پس گراف حداقل γ رأس داشته و (۱) غلط می‌شود.

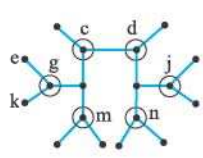
از طرفی گراف فردهمنتظم مرتبه فرد نداریم، پس $n = 11$ هم نمی‌تواند باشد. $n = 8$ هم نمی‌تواند باشد! چرا؟ ببینید یک رأس درجه ۳، خودش و ۳ رأس دیگر را احاطه می‌کند، یعنی با انتخاب یک رأس، چهار رأس احاطه می‌شود. حالا اگر در بدترین حالت، تک‌تک هر ۴ رأس باقی‌مانده دیگر $(4 - 4 = 0)$ را هم بگیریم، $\gamma(G) = 5$ می‌شود. نه ۱۷ در حالت کلی، یک کران بالا برای $\gamma(G)$ به صورت $\gamma(G) \leq n - \Delta$ است. مثلاً اگر $n = 8$ باشد، $\gamma(G) \leq 8 - 3 = 5$ می‌شود، پس قطعاً $\gamma(G)$ برابر ۷ نمی‌شود. بنابراین (۴) می‌تواند درست باشد.

۱۱۲۱- گزینه ۱ از یک طرف، کران پایین γ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{12}{6+1} \right\rceil = 2$$

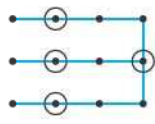
اما کران بالا برای γ ؛ ببینید رأس Δ ، ۶ رأس دیگر را احاطه می‌کند و یکی

۱۱۲۹- **گزینه ۱** از بین $\{e, g, k\}$ حداقل یکی باید انتخاب کنیم



که بهتر است g باشد. شبیه همین بهتر است که j, n, m را انتخاب کنیم. از بین رأس‌های باقی‌مانده هم، حداقل دوتا را باید انتخاب کنیم، پس $\gamma(G) = 6$ می‌شود.

۱۱۳۰- **گزینه ۳** در مسیر $abcd$ حداقل دو رأس باید انتخاب شود که بهتر است $\{b, d\}$ باشد. از مسیر $efgh$ هم، رأس f را انتخاب می‌کنیم. از مسیر $ijkl$ هم، حداقل دوتا باید انتخاب کنیم (مثل $\{j, l\}$)، پس $\gamma(G) = 5$! صبر کنید! شاید شما هم در این دام گرفتار شده باشید. راه بهتری هم وجود دارد. ببینید:

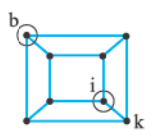


پس: $\gamma(G) = 4$

۱۱۳۱- **گزینه ۲** گراف از مرتبه $n = 12$ بوده و $\Delta = 5$ است، پس

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil = \left\lceil \frac{12}{6} \right\rceil = 2$$

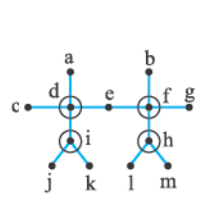
ببینید من می‌گویم خود گراف زیر، حداقل دو رأس برای احاطه کردن می‌خواهد، اما خوب با این دوتا، کل رأس‌های گراف مسئله احاطه نمی‌شود، ولی اگر رأس k را اضافه کنیم، همه رأس‌ها احاطه می‌شود، پس $\gamma(G) = 3$.



۱۱۳۲- **گزینه ۳** گراف از مرتبه $n = 20$ بوده و $\Delta = 5$ است، پس

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil = \left\lceil \frac{20}{6} \right\rceil = 4$$

رأس‌ها را احاطه کنید؟ به نظر می‌رسد که این کار ممکن نباشد. ببینید من می‌گویم از هر کدام از پنج‌ضلعی‌ها، حداقل دو رأس باید انتخاب کنیم، پس حداقل ۸ رأس، برای احاطه کل رأس‌ها نیاز است. از طرفی $\{f, h, k, m, p, r, e, a\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است، پس $\gamma(G) = 8$ می‌شود.



۱۱۳۳- **گزینه ۲** از بین i, j, k حداقل یکی باید انتخاب شود، که بهتر است i را بگیریم. شبیه همین برای احاطه شدن کل رأس‌ها با کم‌ترین تعداد، d, f, h را انتخاب می‌کنیم، پس $\gamma(G) = 4$.

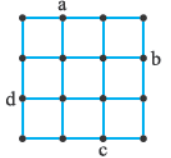
۱۱۳۴- **گزینه ۲** از بین a, m, b, c حداقل یکی باید انتخاب شود که بهتر است c را بگیریم. از بین l, k هم حداقل یکی باید انتخاب شود که بهتر است k را بگیریم. شبیه همین از بین m, e, f, g هم حداقل یکی باید انتخاب شود که بهتر است m را بگیریم و با انتخاب i ، کل رأس‌ها احاطه می‌شود، پس $\gamma(G) = 4$.

۱۱۳۵- **گزینه ۱** گراف از مرتبه $n = 19$ بوده و $\Delta = 5$ است، پس

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil = \left\lceil \frac{19}{6} \right\rceil = 4$$

مثلث‌ها، حداقل یک رأس باید انتخاب شود، پس $\gamma(G) \geq 5$ می‌شود. مجموعه $\{f, h, j, l, n\}$ ، کل رأس‌های دیگر را احاطه می‌کنند، پس $\gamma(G) = 5$ می‌شود.

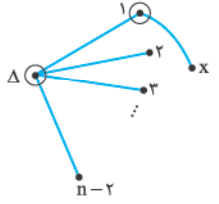
۱۱۳۶- **گزینه ۲** گراف از مرتبه $n = 16$ بوده و $\Delta = 4$ است، پس



$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil = \left\lceil \frac{16}{5} \right\rceil = 4$
مجموعه $\{a, b, c, d\}$ ، کل رأس‌ها را احاطه می‌کند، پس $\gamma(G) = 4$ است.

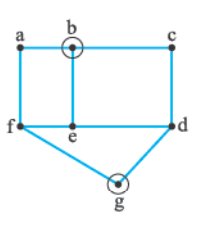
۱۱۳۷- **گزینه ۲** بیایید گراف را رسم کنیم. یک رأس قرار داده و آن را به

$n - 2$ رأس دیگر وصل می‌کنیم. یک رأس دیگر مثل X باقی‌مانده است که چون گراف همبند است، باید آن را به یکی از رأس‌های 1 تا $n - 2$ وصل کنیم (مثلاً به 1 وصل می‌کنیم). چون گراف دور ندارد، دیگر یالی نمی‌تواند داشته باشد. (با اضافه کردن هر یال دیگر، دور به وجود می‌آید). واضح است که $\{1, X\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است، پس $\gamma(G) = 2$ خواهد بود.



بد نیست توجه کنید که مجموعه احاطه‌گر مینیمم حداکثر $n - 2$ رأس (مجموعه احاطه‌گر $\{1, 2, \dots, n - 2\}$) می‌تواند داشته باشد، پس $\gamma(G) = 2$ و $\gamma(G) = 4$ هم نادرست هستند.

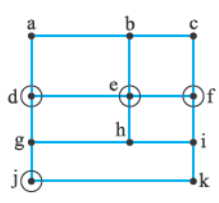
۱۱۳۸- **گزینه ۱** هر تقاطع را با یک رأس و خیابان‌ها را با یال نمایش



می‌دهیم تا گراف زیر به دست آید. گراف از مرتبه $n = 7$ و $\Delta = 3$ است، پس $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil = \left\lceil \frac{7}{4} \right\rceil = 2$ طرفی مجموعه $\{b, g\}$ ، کل رأس‌های گراف را احاطه می‌کند، پس $\gamma(G) = 2$ می‌شود.

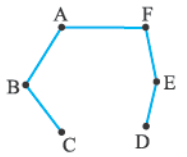
۱۱۳۹- **گزینه ۲** برای هر تقاطع، یک رأس قرار داده و خیابان‌های بین آن‌ها

را هم با یال مشخص کنیم، تا گراف زیر به دست آید. یک خودپر داز گفته در e قرار دهید. یک راه این است که از بین $\{a, d\}$ ، حداقل یکی و از بین $\{c, f\}$ هم، حداقل یکی باید انتخاب شود که بهتر است f و d را انتخاب کنیم. از بین k و j هم حداقل یکی باید انتخاب شود (مثلاً j)، بنابراین به غیر از e ، نیاز به نصب



حداقل سه خودپر داز دیگر داریم تا کل رأس‌ها احاطه شده و خواسته مسئله برآورده گردد. یک راه دیگر، انتخاب b به همراه h و j است. خلاصه هر کاری کنیم، نیاز به انتخاب سه رأس داریم.

۱۱۴۰- **گزینه ۲** ۶ رأس (متناظر با ۶ شهر) قرار می‌دهیم. اگر شهری،



شهر دیگری را پوشش دهد، یعنی فاصله آن‌ها حداکثر تا ۵۰ کیلومتر باشد، آن‌ها را به هم وصل می‌کنیم تا گراف مقابل به وجود آید؛ حالا کافی است $\gamma(G)$ را به دست آوریم.

۱۱۴۱- **گزینه ۲** قبل از این که بخواهم شما را درگیر راه‌حل اصلی کنم، کمی

دقت کنید! من می‌گویم خیلی خوب است که یک درمانگاه در C بزنیم، چون روستاهای a, d, j, e, f, b ، g و k با همین یکی، پوشش داده شده می‌شود.

می بینید که با حذف هیچ کدام از رأس‌های $\{a, c\}$ ، تبدیل به γ - مجموعه نمی‌شود. همین مثال نشان می‌دهد که $\{a, c\}$ هم غلط است، چون $\{b\} - \{a, c\} \neq \emptyset$.

اما $\{a, c\}$ درست است. چرا؟ ببینید، یک مجموعه احاطه‌گر با رأس‌های $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ داریم. اگر V_1 را حذف کرده و هنوز مجموعه احاطه‌گر باقی بماند، آن را حذف می‌کنیم، در غیر این صورت آن را نگه می‌داریم. همین کار را برای بقیه رأس‌ها هم انجام می‌دهیم. مجموعه جدیدی که به دست می‌آید، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال خواهد بود.

۱۱۴۷- گزینه ۲ اگر $V_p \in A$ باشد، مجموعه $\{V_1, V_p, V_5\}$ ، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است. چون هر کدام از رأس‌ها را که حذف کنیم، مجموعه حاصل، دیگر احاطه‌گر نیست، پس A دارای ۳ عضو، ولی این مجموعه، γ - مجموعه نیست، چون مجموعه احاطه‌گر مینیمم، دارای ۲ عضو بوده، مثل $\{V_p, V_4\}$ که با کم‌ترین تعداد عضو، کل رأس‌ها را احاطه می‌کند.

۱۱۴۸- گزینه ۱ اگر i عضو A نباشد، از هر کدام از مربع‌ها، حداقل دو رأس باید انتخاب شود تا کل رأس‌ها احاطه شود. مثلاً $\{d, b, g, e, o, q, j, m\}$ که یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۸ عضوی است. اما در گزینه‌ها دقت کنید! آیا مجموعه احاطه‌گر ۹ عضوی هم می‌توانیم داشته باشیم. اگر مجموعه‌ای را به صورت $\{a, c, h, f, k, l, n, p\}$ بگیریم، هنوز رأس i احاطه نشده است، پس مجبوریم حداقل یک رأس دیگر (مثل d) اضافه کنیم. مجموعه جدید هم، یک مجموعه احاطه‌گر ۹ عضوی است، ولی مینیمال نیست، چون رأس a یا c قابل حذف شدن است.

پس مجموعه احاطه‌گر مینیمالی که i عضوی از آن نباشد، می‌تواند فقط ۸ عضوی باشد.

۱۱۴۹- گزینه ۲ خوب باید کاری کنیم که مجموعه احاطه‌گر، دارای

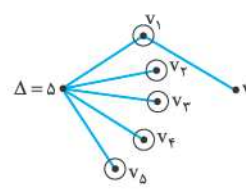
بیشترین تعداد عضو بوده و در ضمن، هیچ رأسی هم قابل حذف کردن نباشد. (با حذف هر رأس، دیگر احاطه‌گر نشه!) از هر کدام از آن پنج‌ضلعی‌ها، دو رأس باید انتخاب شود. این‌ها را طوری بگیریم که رأس a را احاطه نکنند، یعنی مثلاً به صورت مقابل بگیریم:

برای احاطه شدن a ، مجبوریم حداقل یک رأس دیگر (مثل خود a) اضافه کنیم. مجموعه ۹ عضوی به دست آمده از رأس‌ها، کل رأس‌های دیگر را احاطه کرده و در ضمن، هیچ رأسی قابل حذف شدن نیست، پس مجموعه احاطه‌گر مینیمال، حداکثر ۹ عضو می‌تواند داشته باشد.

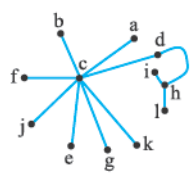
۱۱۵۰- گزینه ۲ ببینیم ساختار این گراف به چه صورتی می‌تواند باشد!

یک رأس $\Delta = 5$ قرار می‌دهیم. یک رأس دیگر مثل V_7 باقی مانده است. چون گراف همبند بوده و دور هم ندارد، این رأس را با یک یال باید به یکی از رأس‌های $\{V_1, V_2, \dots, V_5\}$ متصل کرد. (مثلاً به V_1).

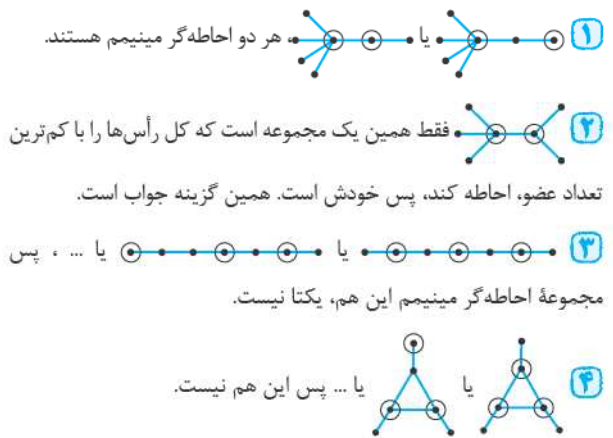
یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال با بیشترین تعداد عضو می‌تواند به صورت $\{V_1, V_2, \dots, V_5\}$ باشد، پس $\{a, c\}$ می‌شود پاسخ.



یکی هم در h بزینیم و خلاص! اما برای این که قانع بشوید، باید برای هر منطقه، یک رأس قرار داده و اگر فاصله دو منطقه، حداکثر ۲۰ کیلومتر باشد، آن‌ها را به هم وصل کنیم. مثلاً c به b وصل می‌شود. c به f و e وصل می‌شود و ... (یعنی رأس‌هایی که پوشش می‌ده!) حالا دیگر من گراف را کامل نکشیدم، چون کافی است $\gamma(G)$ را پیدا کنیم. رأس درجه ۱- p نداریم، پس $\gamma(G) > 1$ و از طرفی با دو رأس $\{c, h\}$ ، کل رأس‌ها احاطه می‌شود، پس $\gamma(G) = 2$.



۱۱۴۲- گزینه ۲ گفته γ - مجموعه، یکتا باشد، یعنی چی؟ یعنی فقط یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم داشته باشیم. یکی یکی گزینه‌ها را بررسی کنیم:



۱۱۴۳- گزینه ۳ با برداشتن یک رأس از A ، ممکن است هنوز احاطه‌گر باشد، پس $\{1\}$ و $\{2\}$ غلط هستند. مجموعه B مینیمال است، پس با برداشتن هر رأس از آن، دیگر احاطه‌گر نخواهد بود، این یعنی $\{3\}$ درست است.

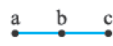
۱۱۴۴- گزینه ۱ واضح است که $\gamma(G) = 2$ (مثلاً $\{e, c\}$ یا $\{a, d\}$ ، کل رأس‌ها را احاطه می‌کند). با کمی جستجو درمی‌یابیم که در این گراف خاص، مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم، مینیمال هم هستند، پس حداکثر تعداد عضوهای مجموعه احاطه‌گر مینیمال، همان ۲ است. به عبارت دیگر، مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۳ عضوی نداریم. (مثلاً $\{e, c, b\}$ بگیریم، قابل حذفه و ...)

۱۱۴۵- گزینه ۲ مجموعه احاطه‌گر مینیمال، کل رأس‌ها را احاطه می‌کند، ولی هیچ کدام از رأس‌ها در آن، قابل حذف شدن نیست. یعنی اگر هر کدام را حذف کنیم، مجموعه، دیگر احاطه‌گر نخواهد بود. به جای این که رأس b را بگیریم، a و i را می‌گیریم. چرا؟ چون اگر b را بگیریم، هر دو رأس i و a را احاطه می‌کند، آن وقت دیگر i و a را نمی‌توانیم بگیریم (پهن قابل حذف شده). شبیه همین به جای h ، g و به جای e ، f را می‌گیریم تا رأس‌های کم‌تری را احاطه کند. هیچ رأسی c و d را احاطه نکرده، پس آن‌ها را هم می‌گیریم. مجموعه $\{a, i, g, f, c, d\}$ ، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال با بیشترین تعداد عضو است.

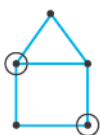
۱۱۴۶- گزینه ۲ مجموعه احاطه‌گر مینیمال، ممکن است مینیمم نباشد، پس این گونه نیست که با حذف برخی از رؤس هر مجموعه احاطه‌گر دلخواهی، یک γ - مجموعه بتوانیم بسازیم. بنابراین $\{1\}$ و $\{3\}$ رد می‌شوند.

مثلاً گراف مقابل را ببینید:

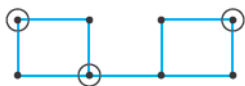
$\{b\}$ ، یک γ - مجموعه است و $\{a, c\}$ ، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال.



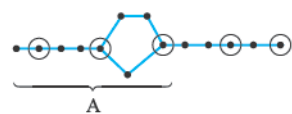
۳- $\left\lfloor \frac{5}{4} \right\rfloor = 2$ پس $\Delta = 3$ و $n = 5$ می شود. از طرفی، مجموعه احاطه‌گر مینیمم به صورت مقابل می تواند باشد:



پس این هم نمی شود. ۴- $\left\lfloor \frac{8}{4} \right\rfloor = 2$ پس $\Delta = 3, n = 8$ مجموعه دوعضوی، احاطه نمی شود. (کمی جست و جو کنید!) و نیاز به حداقل ۳ عضو دارد.

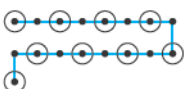


۱۱۵۷- **گزینه ۳** گراف از مرتبه $n = 14$ و $\Delta = 3$ است، پس $\gamma(G) \geq \left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor = 4$ به حداقل دو رأس داریم. در دنباله سمت چپ هم، حداقل یک رأس می خواهیم که اگر به صورت روبه رو بگیریم، با ۳ رأس، کل رأس های A احاطه می شود. در دنباله راست هم، حداقل دو رأس برای احاطه کردن رأس ها لازم است. پس $\gamma(G) = 5$ می شود.

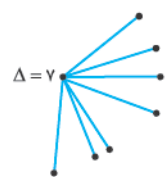


۱۱۵۸- **گزینه ۲** مسیر P_{17} را به صورت مقابل در نظر می گیریم:

برای این که خواسته مسئله اتفاق بیفتد، رأس ها را به صورت بالا می گیریم. هیچ کدام از رأس ها را نمی توانیم حذف کنیم، (دیگه احاطه گر نمیشه!) پس این مجموعه، احاطه گر مینیمال با بیشترین تعداد عضو می تواند باشد که ۹ عضو دارد. (به فرمول هم برای P_n در حالت کلی می تونیم پیدا کنیم که مجموعه احاطه گر مینیمال، حداکثر $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ عضو می تونه داشته باشه.)



۱۱۵۹- **گزینه ۱** اگر $\gamma(G) = 1$ باشد، یعنی رأسی وجود دارد که به همه رأس های دیگر وصل است. این یعنی $\Delta = p - 1 = 7$ خواهد بود. برعکس این هم درست است، یعنی اگر $\Delta = p - 1$ باشد، $\gamma(G) = 1$ است. کم ترین تعداد یال ها وقتی به دست می آید که گراف، به صورت مقابل باشد، یعنی ۷ یال داشته باشد:



بیشترین تعداد یال هم وقتی به دست می آید که گراف، کامل مرتبه ۸ یعنی K_8 باشد، پس بیشترین تعداد یال ها هم برابر $\frac{8 \times 7}{2} = 28$ می شود. پس اختلاف این دو مقدار، برابر $28 - 7 = 21$ است.

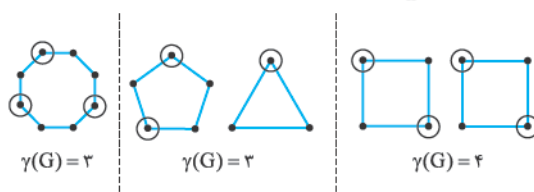
۱۱۶۰- **گزینه ۱** با توجه به تست قبلی، گراف، رأس از درجه ۸ ندارد. بیشترین تعداد یال ها وقتی به دست می آید که درجه ها، تا حد امکان بزرگ باشند، پس همه رأس ها را از درجه ۷ می گیریم، اما یک نکته ای؛ گراف فرد - منتظم مرتبه فرد نداریم، یعنی گراف ۷ - منتظم مرتبه ۹ نداریم، پس مجبوریم درجه ها را به صورت مقابل بگیریم:

حالا: $2q = 7 \times 8 + 6 = 62 \Rightarrow q = 31$

۱۱۵۱- **گزینه ۲** ساختار ۲ - منتظم ها به صورت اجتماعی از تعدادی C_n (چندضلعی) هستند. حالا گفته همبند، پس فقط یک حالت می ماند، آن هم گراف C_{23} است. حتماً یادتان هست که $\gamma(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ ، پس $\gamma(C_{23}) = \left\lfloor \frac{23}{3} \right\rfloor = 8$

۱۱۵۲- **گزینه ۱** عدد احاطه گری هر دو گراف P_n و C_n برابر $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ است، یعنی $\gamma(C_n) = \gamma(P_n) = 7$ پس $\gamma(P_n) = 7$

۱۱۵۳- **گزینه ۲** در گراف k - منتظم مرتبه p داریم $pk = 2q$ پس: $2p = 2 \times 8 \Rightarrow p = 8$ گراف ۲ - منتظم از مرتبه ۸ است. ساختار گراف های ۲ - منتظم به صورت اجتماعی از تعدادی C_n است، پس این گراف به صورت های زیر می تواند باشد:



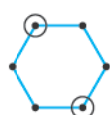
پس $\gamma(G)$ دو مقدار می تواند داشته باشد.

۱۱۵۴- **گزینه ۲** در گراف k - منتظم مرتبه p و اندازه q ، رابطه $pk = 2q$ برقرار است، پس: $8k = 2 \times 24 \Rightarrow k = 6$ پس گراف ۶ - منتظم از مرتبه ۸ است. اگر در گراف، رأس درجه ۱ - داشته باشیم، $\gamma(G) = 1$ می شود، پس این جا چون رأس درجه ۷ نداریم، $\gamma(G) > 1$ می شود. از طرفی یک رأس درجه ۶، خودش و ۶ رأس دیگر را احاطه می کند (تا، تا این جا). پس اگر یک رأس دیگر را هم انتخاب کنیم، دقیقاً همه ۸ رأس احاطه می شود، پس $\gamma(G) = 2$ می شود.

۱۱۵۵- **گزینه ۲** داریم $\gamma(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ ، پس $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor = 11$ می شود. حالا: $10 < \frac{n}{3} \leq 11 \xrightarrow{\times 3} 30 < n \leq 33$ (I) از طرفی $\gamma(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ می شود، پس: $\gamma(P_{n+2}) = \left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor = 11 \Rightarrow 10 < \frac{n+2}{3} \leq 11 \xrightarrow{\times 3} 30 < n+2 \leq 33 \xrightarrow{-2} 28 < n \leq 31$ (II) با اشتراک بین (I) و (II) می فهمیم، فقط $n = 31$ می تواند باشد.

۱۱۵۶- **گزینه ۲** صبورانه گزینه ها را برویم جلو:

۱) $n = 6$ و $\Delta = 2$ است، پس $\left\lfloor \frac{6}{3} \right\rfloor = 2$ می شود. از طرفی، مجموعه احاطه گر مینیمم به صورت مقابل می تواند باشد:



پس در این گراف $\gamma(G) = 2$ می شود.

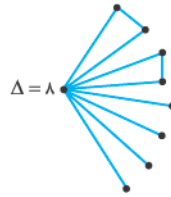
۲) $n = 7$ و $\Delta = 2$ است، پس $\left\lfloor \frac{7}{3} \right\rfloor = 2$ می شود. از طرفی، مجموعه احاطه گر مینیمم به صورت مقابل می تواند باشد: $\gamma(G) = 3$ پس این جا هم $\gamma(G) = 3$ می شود.



۱۱۶۱- **گزینه ۱** چون $\gamma(G) = 1$ پس گراف، رأسی دارد که به همه رأس‌های دیگر وصل است، یعنی $\Delta = p - 1 = 8$ می‌شود. تا این‌جا، گراف به صورت روبه‌رو می‌شود:



دو یال دیگر باید اضافه کنیم، طوری که گراف، فقط دو دور داشته باشد. این دو یال باید به صورت بالا اضافه شوند (یعنی نباید مواز باشند، چون اون‌په‌روی سه دور پیدا می‌کنه). پس گراف، ۴ رأس درجه ۱ یک پیدا می‌کند.



$$\Delta = 8$$

۱۱۶۲- **گزینه ۱** گراف از مرتبه $n = 10$ و $\Delta = 4$ است، پس

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil = \left\lceil \frac{10}{5} \right\rceil = 2$$

دیگر را احاطه می‌کند، پس $\gamma(G) = 2$ است، اما چندتا γ - مجموعه داریم؟ ببینید، برای این‌که a و z احاطه شود، رأس i حتماً باید انتخاب شود، پس فقط یک رأس دیگر می‌ماند. آن یک رأس باید همه رأس‌های d, c, g و e را احاطه کند. فقط یک رأس با این شرایط یعنی f وجود دارد، پس فقط یک γ - مجموعه $\{i, f\}$ در این گراف وجود دارد.

۱۱۶۳- **گزینه ۳** خب گراف از مرتبه $n = 6$ بوده و $\Delta = 3$ است، پس

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil = \left\lceil \frac{6}{4} \right\rceil = 2$$

مجموعه احاطه‌گر مینیمم یا γ - مجموعه است، پس $\gamma(G) = 2$ می‌شود. به ازای هر انتخاب دو رأسی که، یک رأس از بالا و یک رأس از پایین انتخاب شود، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم یا γ - مجموعه به دست می‌آید، پس تعداد γ - مجموعه‌ها می‌شود:

$$\binom{3}{1} \binom{3}{1} = 9$$

۱۱۶۴- **گزینه ۲** **روش اول** واضح است که $\gamma(G) = 2$ می‌شود. طبق

یک نظم برویم جلو تا چیزی از قلم نیفتد. نمی‌شود هیچ کدام از رأس‌های a, b و e را انتخاب نکرده باشیم، پس ۳ حالت می‌گیریم:

۱) رأس a انتخاب شده باشد: با هر کدام از رأس‌های b, d و c یک مجموعه احاطه‌گر دو عضوی می‌سازد. (۳ تا این‌جا)

۲) رأس e انتخاب شده باشد: با هر کدام از رأس c, d و b یک مجموعه احاطه‌گر دو عضوی می‌سازد. (۳ تا هم این‌جا)

۳) رأس b انتخاب شده باشد: با d یک مجموعه احاطه‌گر دو عضوی می‌سازد ($\{b, e\}$ و $\{b, a\}$ رو قبلاً شمردیم!)

خلاصه شد ۷ تا γ - مجموعه.

روش دوم هر دو رأس که انتخاب کنیم، دقیقاً یک γ - مجموعه می‌شود.

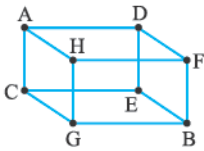
به‌جز $\{a, e\}$ ، $\{c, b\}$ و $\{c, d\}$ ، پس تعداد γ - مجموعه‌ها برابر

$$7 = \binom{5}{2} - 3 \text{ تا می‌شود.}$$

۱۱۶۵- **گزینه ۲** $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil = \left\lceil \frac{8}{4} \right\rceil = 2$ می‌شود. از طرفی

مثلاً $\{A, B\}$ ، یک مجموعه احاطه‌گر است، پس $\gamma(G) = 2$ می‌شود. به رأس‌های A و B دقت کنید. دو رأس، قطر مکعب هستند. از روی همین می‌توانید γ - مجموعه‌ها را حدس بزنید. دو سر مقابل هم قطرهای مکعب، همان

γ - مجموعه‌ها هستند (یعنی $\{G, D\}$ ، $\{C, F\}$ و $\{H, E\}$ ، پس تا ۴ γ - مجموعه داریم. (قطر روبه‌ها مثل $\{A, G\}$ رو نمی‌گم، اون‌ا احاطه‌گر نیستن.)



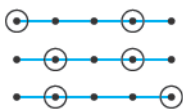
۱۱۶۶- **گزینه ۱** بگویید ببینم آیا ممکن است در مجموعه احاطه‌گر دو عضوی، رأس g حضور نداشته باشد؟ مثلاً $\{a, c\}$ یا $\{b, f\}$ یا ... من می‌گویم نه نمی‌شود، پس رأس g حتماً باید باشد. g همه رأس‌ها را احاطه می‌کند، پس هر رأس دیگری که انتخاب کنید، به همراه g ، یک مجموعه احاطه‌گر دو عضوی می‌شود (مثل $\{b, g\}$ ، $\{a, g\}$ و ...). پس ۶ مجموعه احاطه‌گر دو عضوی داریم.

۱۱۶۷- **گزینه ۲** گراف از مرتبه $n = 12$ بوده و $\Delta = 5$ است، پس

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil = \left\lceil \frac{12}{6} \right\rceil = 2$$

قطر دار، حداقل یکی باید انتخاب شود، یعنی برای احاطه شدن کل رأس‌ها، حداقل ۳ رأس می‌خواهیم. از طرفی $\{f, g, i\}$ ، کل رأس‌ها را احاطه می‌کنند، پس $\gamma(G) = 3$ می‌شود. برای تشکیل γ - مجموعه می‌توانیم d یا g ، a یا f ، i یا l را برداریم، پس $2 \times 2 \times 2 = 8$ تا مجموعه احاطه‌گر با کم‌ترین تعداد عضو به دست می‌آید. (مثلاً $\{a, g, i\}$ یا $\{a, d, i\}$ یا ...)

۱۱۶۸- **گزینه ۲** $\gamma(P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ است، پس $\gamma(P_5) = \left\lceil \frac{5}{3} \right\rceil = 2$ تا



γ - مجموعه، می‌تواند به صورت‌های مقابل باشد:

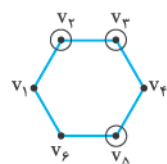
۱۱۶۹- **گزینه ۳** P_6 را به صورت زیر ببینید:



هر ۴ رأس که انتخاب کنید، احاطه‌گر است به‌جز $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ و $\{V_3, V_4, V_5, V_6\}$ ؛ پس:

$$13 = \binom{6}{4} - 2 = 15 - 2 = 13$$

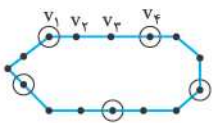
۱۱۷۰- **گزینه ۳** یک مجموعه احاطه‌گر ۳ عضوی، مثلاً می‌تواند به صورت



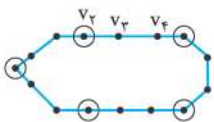
روبه‌رو باشد. باز هم جستجو کنید. می‌بینید اگر بین حداقل دو تا از رأس‌ها فاصله باشد، به زبان دیگر، هر ۳ رأس که به صورت مسیر P_3 مجاور نباشند، کل رأس‌ها احاطه می‌شوند.

اما اگر ۳ رأس پشت سر هم باشند، دیگر احاطه‌گر نیستند. بنابراین مجموعه‌های ۳ عضوی $\{V_1, V_2, V_3\}$ ، $\{V_2, V_3, V_4\}$ ، $\{V_3, V_4, V_5\}$ ، $\{V_4, V_5, V_6\}$ و $\{V_5, V_6, V_1\}$ ، $\{V_6, V_1, V_2\}$ هیچ کدام احاطه‌گر نیستند.

۱۱۷۱- **گزینه ۱** C_{15} را به صورت



مقابل در نظر بگیرید. یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم به صورت مقابل است:



اگر به جای V_1 ، سمت راستی آن را برداریم، γ - مجموعه به صورت مقابل به دست می‌آید:

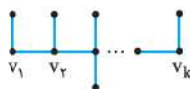
اگر با V_3 هم شروع کنید، شبیه صفحه قبل یک γ - مجموعه دیگر به دست می آید (شد ۳ تا این جا). ولی اگر از V_4 شروع کنیم، همان مجموعه احاطه گر اول به دست می آید. بنابراین تا γ - مجموعه وجود دارد.

۱۱۷۲- گزینه ۲ خیالتان را راحت کنم، در هیچ کدام از C_n ها، γ - مجموعهها یکتا نیستند، به عبارت دیگر، چندین γ - مجموعه وجود دارد (مثلاً تو حالت C_4 و C_5 امتحان کن. یکی رو بگیر و دو تا در میون پرو بگو). پس ۱ و ۳ رد می شوند، اما در مسیره ها، P_{13} را ببینید: $\gamma(P_{13}) = \left\lfloor \frac{13}{3} \right\rfloor = 5$ است. دو تا γ - مجموعه به صورت های زیر می توانند باشند:



اما P_{14} فقط یک γ - مجموعه به صورت زیر دارد. یادتان باشد که γ - مجموعه در گراف های P_{2k} ، یکتا است. (یعنی اگر n مضرب ۳ باشد، γ - مجموعه P_n ، یکتا است.)

۱۱۷۳- گزینه ۲ تمرین مهمی در کتاب درسی داریم که می گوید: اگر $k < \frac{n}{2}$ باشد، گراف n رأسی با $\gamma(G) = k$ وجود دارد. دلیل آن هم خیلی ساده است. می توانید گراف روبه رو را در نظر بگیرید.



k رأس به صورت مسیری قرار دهید و بعد به هر کدام، حداقل یک یال وصل کنید تا گراف از مرتبه n شود. مثلاً گراف ۹ رأسی که $\gamma(G) = 3$ است، می تواند به صورت مقابل باشد: بنابراین گراف ۹ رأسی که $\gamma = 2, 3, 4$ باشد، وجود دارد.

