# فهرست

فصل ۱

# ماتریس و کاربردها

درس ۱

## ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

ماتریس، آرایشی مستطیلی از اعداد حقیقی است که به هر عضو آن درایه می‌گوییم.

هر ماتریس از تعدادی سطر و تعدادی ستون تشکیل شده است. اگر ماتریس A، m سطر و n ستون داشته باشد، مرتبهٔ ماتریس A، $m\times n$ است و آن را به صورت $A_{m\times n}$ یا $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ نمایش می‌دهیم.

$a_{ij}$ یعنی درایهٔ واقع در سطر iاُم و ستون jاُم ماتریس A.

ماتریس زیر دارای ۲ سطر و ۳ ستون است، پس مرتبهٔ آن ۳ × ۲ است.

$$A=\begin{array}{c}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}\begin{array}{l}\to \text{سطر اول} \\ \to \text{سطر دوم}\end{array} \\ \begin{array}{ccc}\uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{ستون اول} & \text{ستون دوم} & \text{ستون سوم}\end{array}\end{array}$$

درایهٔ $a_{21}$ را در نظر بگیرید! این درایه در سطر دوم و ستون اول واقع شده است.

**کدام گزینه ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 4}$ با شرایط $a_{ij}=\begin{cases} i+j & i>j \\ 7 & i=j \\ i^2 & i<j \end{cases}$ را مشخص می‌کند؟** (تمرین کتاب درسی)

۱) $\begin{bmatrix} ۷ & ۱ & ۱ & ۴ \\ ۳ & ۷ & ۵ & ۴ \\ ۴ & ۵ & ۷ & ۹ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۷ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۷ & ۴ & ۴ \\ ۴ & ۵ & ۹ & ۷ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۷ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۷ & ۴ & ۴ \\ ۴ & ۵ & ۷ & ۹ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} ۷ & ۳ & ۴ & ۹ \\ ۱ & ۷ & ۵ & ۴ \\ ۱ & ۴ & ۷ & ۱ \end{bmatrix}$

پاسخ: ماتریس A یک ماتریس ۴ × ۳ است.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

در جایی که شمارهٔ سطر و ستون با هم برابرند $(i=j)$ باید ۷ بگذاریم، در جایی که شمارهٔ سطر از شمارهٔ ستون کم‌تر است باید شمارهٔ سطر را به توان ۲ برسانیم و در ماتریس جایگزین کنیم. بنابراین داریم:

$$a_{12}=1^2,a_{13}=1^2,a_{14}=1^2,a_{23}=2^2,a_{24}=2^2,a_{34}=3^2$$

در جایی که شمارهٔ سطر از شمارهٔ ستون بزرگ‌تر است، شمارهٔ سطر و ستون را با هم جمع می‌کنیم و در ماتریس قرار می‌دهیم. پس:

$$a_{21}=2+1=3,a_{31}=3+1=4,a_{32}=3+2=5$$

بنابراین:

$$A=\begin{bmatrix} ۷ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۷ & ۴ & ۴ \\ ۴ & ۵ & ۷ & ۹ \end{bmatrix}$$

## ماتریس‌های خاص

۱ **ماتریس صفر:** ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر است و آن را با $\bar{O}$ نمایش می‌دهیم.

$$\bar{O}_{2\times 3}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۲ **ماتریس سطری:** ماتریسی که فقط یک سطر دارد. مرتبهٔ این ماتریس، $1\times n$ است.

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d & e \end{bmatrix}_{1\times 5}$$

۳ **ماتریس ستونی:** ماتریسی که فقط یک ستون دارد. مرتبهٔ این ماتریس، $n\times 1$ است.

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

۴ **ماتریس مربعی:** ماتریسی که تعداد سطرها و ستون‌های آن با هم برابرند. مرتبهٔ این ماتریس $n \times n$ است.
این ماتریس دارای قطر اصلی و قطر فرعی است.
در درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس مربعی $i < j$، روی قطر اصلی $i = j$ و پایین قطر اصلی $i > j$ است.
($i$ شمارهٔ سطر و $j$ شمارهٔ ستون درایهٔ $a_{ij}$ است.)

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

قطر فرعی　　قطر اصلی

۵ **ماتریس پایین‌مثلثی:** ماتریسی است **مربعی** که همهٔ درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفرند.

$$\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ d & b & ۰ \\ e & f & c \end{bmatrix}$$

۶ **ماتریس بالامثلثی:** ماتریسی است **مربعی** که همهٔ درایه‌های پایین قطر اصلی آن صفرند.

$$\begin{bmatrix} a & d & e \\ ۰ & b & f \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}$$

۷ **ماتریس قطری:** ماتریسی است **مربعی** که تمام درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی آن صفرند.
(ماتریس قطری هم بالامثلثی است و هم پایین‌مثلثی)

$$\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}$$

۸ **ماتریس اسکالر:** ماتریسی است **قطری** که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابرند.

$$\begin{bmatrix} k & ۰ & ۰ \\ ۰ & k & ۰ \\ ۰ & ۰ & k \end{bmatrix}$$

۹ **ماتریس همانی (واحد):** ماتریسی است اسکالر که درایه‌های روی قطر اصلی آن یک باشند.

$$I_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

گاهی ماتریس همانی را این‌گونه معرفی می‌کنند: $I_n = [a_{ij}]_{n \times n}$ که $a_{ij} = \begin{cases} ۱ & i = j \\ ۰ & i \neq j \end{cases}$

$$I_۳ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

## تساوی دو ماتریس

دو ماتریس $A$ و $B$ مساوی‌اند هرگاه: ۱ دو ماتریس، هم‌مرتبه باشند و ۲ درایه‌های نظیربه‌نظیر در $A$ و $B$ برابر باشند.

مثلاً دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۵ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x & -۱ \\ ۲ & y \\ z & ۱ \end{bmatrix}$ زمانی با هم برابرند که $x = ۱$، $y = ۵$ و $z = ۳$ باشد.

**مثال** اگر $A = \begin{bmatrix} ۲x - y & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۳ & ۲x + y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A = B$، در این صورت حاصل $x + y + z$ کدام است؟ *(تمرین کتاب درسی)*

**پاسخ** مرتبهٔ دو ماتریس یکی است، بنابراین برای این‌که دو ماتریس برابر باشند باید درایه‌های دو ماتریس نظیربه‌نظیر برابر باشند، یعنی:

$$\begin{cases} ۲x - y = ۳ \\ ۲x + y = ۵ \\ z = -۲ \end{cases} \xrightarrow{+} ۴x = ۸ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow y = ۱$$

پس:
$$x + y + z = ۲ + ۱ - ۲ = ۱$$

## اعمال مقدماتی روی ماتریس‌ها

### ۱- جمع و تفریق

اگر دو ماتریس **هم‌مرتبه** باشند، با جمع یا تفریق کردن **درایه‌های نظیر دو ماتریس**، جمع یا تفریق دو ماتریس به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & ۰ \\ ۳ & ۶ \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ -۲ & ۲ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ و $a_{ij}=\begin{cases} ۷ & i=j \\ i+j & i>j \\ i^۲ & i<j \end{cases}$، در ماتریس $I-A$ کدام درایه وجود ندارد؟

۱) مضرب ۳ ۲) مضرب ۴ ۳) مضرب ۵ ۴) مضرب ۷

اول باید تکلیف ماتریس A را روشن کنیم.

$$A=\begin{bmatrix} ۷ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۷ & ۴ \\ ۴ & ۵ & ۷ \end{bmatrix}$$

قبلاً گفته بودیم که در درایه‌های پایین قطر اصلی ماتریس مربعی $i>j$ و در درایه‌های بالای قطر اصلی $i<j$ است.

$$I-A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۷ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۷ & ۴ \\ ۴ & ۵ & ۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۶ & -۱ & -۱ \\ -۳ & -۶ & -۴ \\ -۴ & -۵ & -۶ \end{bmatrix}$$

*I (ماتریس همانی) هم که آشناست!*

در بین درایه‌های $I-A$ عدد مضرب ۷ نداریم.

## ۲- ضرب عدد در ماتریس

اگر عددی در ماتریس ضرب شود، در تمام درایه‌های آن ضرب می‌شود.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۳ \\ ۲ & ۰ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow -۳A=\begin{bmatrix} -۳ & ۳ & -۹ \\ -۶ & ۰ & -۱۲ \end{bmatrix}$$

## چند ویژگی در مورد جمع و تفریق

(ماتریس‌های A، B و C هم‌مرتبه هستند)

۱) $A+B=B+A$ (خاصیت جابه‌جایی)

۲) $A+\bar{O}=A$ (خاصیت عضو خنثی در جمع)

۳) $k(A\pm B)=kA\pm kB$ (k عددی حقیقی است)

۴) $(A+B)+C=A+(B+C)$ (خاصیت شرکت‌پذیری)

۵) $A+(-A)=\bar{O}$ (خاصیت عضو قرینه)

## ۳- ضرب دو ماتریس

اگر $A_{m\times n}$، $B_{k\times l}$ باشد، $A\times B$ زمانی وجود دارد که $n=k$ باشد، یعنی ضرب دو ماتریس زمانی قابل تعریف است که تعداد ستون‌های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشند. $A\times B$، ماتریسی است از مرتبهٔ $m\times l$.

$$\underbrace{A_{m\times n} \times B_{k\times l}}_{n=k} \quad ; \quad A_{۳\times۲}\times B_{۲\times۴}=C_{۳\times۴}$$

برای ضرب دو ماتریس، از ماتریس اول، سطر و از ماتریس دوم، ستون برمی‌داریم و درایه‌های هر سطر در ستون، نظیربه‌نظیر ضرب و حاصل با هم جمع می‌شود و در ماتریس حاصل‌ضرب جایگزین می‌شود.

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & -۱ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \underset{\text{سطر اول ستون اول}}{۲-۱+۰} & \underset{\text{سطر اول ستون دوم}}{۴+۱+۰} \\ \underset{\text{سطر دوم ستون اول}}{۱+۳+۸} & \underset{\text{سطر دوم ستون دوم}}{۲-۳+۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ ۱۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

اگر $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}\times A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ ۳ & ۱ & -۱ \\ d & e & f \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $a+b+e$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ که $۳\times۱$ است در ماتریس A از مرتبهٔ $۱\times۳$ ضرب شده و یک ماتریس $۳\times۳$ به دست آمده است. با فرض A به شکل $[x \quad y \quad z]$ داریم:

$$\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}[x \quad y \quad z]=\begin{bmatrix} a & b & c \\ ۳ & ۱ & -۱ \\ d & e & f \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲x & ۲y & ۲z \\ x & y & z \\ ۳x & ۳y & ۳z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b & c \\ ۳ & ۱ & -۱ \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

واضح است که $a=۲x$، $b=۲y$ و $e=۳y$، بنابراین:

$$a+b+e=۲x+۲y+۳y=۲x+۵y=۲(۳)+۵(۱)=۱۱$$

## ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها

۱) در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد.

نکته: ضرب ماتریس همانی در ماتریس مربعی A خاصیت جابه‌جایی دارد. $AI=IA=A$

۲) اگر $AB=AC$ باشد، **نمی‌توان** نتیجه گرفت $B=C$ است (حذف برقرار نیست). $AB=AC \not\Rightarrow B=C$

قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها زمانی برقرار است که ماتریس حذف‌شونده، **وارون‌پذیر** باشد.

ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد. $(A\times B)\times C = A\times(B\times C)$

**جواب‌های معادلهٔ $\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = O$ کدام‌اند؟**

۱) ۳- و ۱-　　۲) ۳- و ۱　　۳) ۳ و ۱-　　۴) ۳ و ۱

از قبل آگاهی داریم که ضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت شرکت‌پذیری است، یعنی: $A\times(B\times C) = (A\times B)\times C$

پس ابتدا حاصل $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$ را به دست می‌آوریم. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ 2x+3 \end{bmatrix}$

حالا باید $\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -x \\ 2x+3 \end{bmatrix}$ برابر با $\bar{O}$ باشد، بنابراین:

$$\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix}_{1\times 2}\begin{bmatrix} -x \\ 2x+3 \end{bmatrix}_{2\times 1} = [-x^2+2x+3]_{1\times 1} = [0]$$

یعنی باید $-x^2+2x+3=0$ باشد، پس:

$$x^2-2x-3=0 \Rightarrow (x-3)(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-1 \end{cases}$$

معادلهٔ ماتریسی داده‌شده دارای دو جواب ۳ و ۱- است.

در ضرب ماتریس‌ها خاصیت توزیع‌پذیری (و فاکتورگیری) برقرار است.

$$\begin{cases} A\times(B\pm C) = A\times B \pm A\times C \\ (B\pm C)\times A = B\times A \pm C\times A \end{cases}$$

اگر حاصل‌ضرب دو ماتریس صفر شود، نمی‌توان نتیجه گرفت یکی از دو ماتریس صفر بوده است. به عبارت دیگر ممکن است از ضرب‌کردن دو ماتریس غیرصفر یک ماتریس صفر به دست آید. مثلاً:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، حاصل‌ضرب دو ماتریس صفر شده اما هیچ‌کدام از ماتریس‌ها، ماتریس صفر نبوده‌اند.

حاصل‌ضرب دو ماتریس قطری، یک ماتریس قطری است و برای محاسبهٔ آن باید درایه‌های روی قطر اصلی دو ماتریس را نظیربه‌نظیر در هم ضرب کرد.

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad & 0 & 0 \\ 0 & be & 0 \\ 0 & 0 & cf \end{bmatrix}$$

اگر دو ماتریس $A$ و $B$ تعویض‌پذیر باشند یعنی $AB = BA$ باشد، اتحادها در مورد آن‌ها برقرارند. اتحادهای مهم را ببینید:

۱) $(A+B)^2 = A^2+B^2+2AB$　　۲) $(A-B)^2 = A^2+B^2-2AB$　　۳) $(A-B)(A+B) = A^2-B^2$

۴) $A^3+B^3 = (A+B)(A^2-AB+B^2)$　　۵) $A^3-B^3 = (A-B)(A^2+AB+B^2)$

اتحادهای بالا در مورد $A_{n\times n}$ و $I_n$ برقرارند. (چون $I$ و $A$ تعویض‌پذیر هستند؛ یعنی $IA = AI = A$)

**اگر $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{ij}]$ دو ماتریس $3\times 3$ با این ویژگی باشند که $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i+j=2k \\ 0 & i+j=2k+1 \end{cases}$ و $b_{ij} = \begin{cases} 1 & i\le j \\ 0 & i>j \end{cases}$، آن‌گاه سطر اول ماتریس $(A-B)^2$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$**

۱) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$　　۲) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$　　۳) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　　۴) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

اول باید تکلیف درایه‌های دو ماتریس $A$ و $B$ را مشخص کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در ماتریس $A$ هر جا مجموع شمارهٔ سطر و ستون یک درایه، عددی فرد بود به جای آن صفر و هر جا مجموع شمارهٔ سطر و ستون درایه، عددی زوج بود به جای آن یک گذاشتیم.

حالا نوبت $A-B$ است که خودش را به شما نشان دهد!

$$A-B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

برای این‌که سطر اول $(A-B)^2$ را به دست بیاوریم کافی است سطر اول $A-B$ را در هر سه ستون $A-B$ ضرب کنیم.

$$\text{سطر اول } (A-B)^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**تست** اگر $A^{۲}=\begin{bmatrix} -۵ & -۲ \\ ۱۳ & ۱۵ \end{bmatrix}$ و $B^{۲}=\begin{bmatrix} ۴ & ۷ \\ ۷ & ۱۲ \end{bmatrix}$ و $A-B=\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ ۶ & ۶ \end{bmatrix}$ باشند، $AB+BA$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -۴ & ۱ \\ -۲۷ & -۱۶ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} -۶ & ۱ \\ -۲۷ & -۱۶ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -۴ & -۱ \\ -۲۷ & -۱۶ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -۶ & -۱ \\ -۲۷ & -۱۶ \end{bmatrix}$

**پاسخ** $A^{۲}$، $B^{۲}$ و $A-B$ ما را یاد اتحاد می‌اندازد؛ اما یادتان باشد اگر A و B تعویض‌پذیر نباشند، اتحاد بی‌اتحاد! یعنی:

$$(A-B)^{۲}=(A-B)(A-B)=A^{۲}-AB-BA+B^{۲}$$

بنابراین:

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۶ & ۶ \end{bmatrix}^{۲}=\begin{bmatrix} -۲ & -۵ \\ ۱۵ & ۱۳ \end{bmatrix}-AB-BA+\begin{bmatrix} ۷ & ۴ \\ ۱۲ & ۷ \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ۹ & ۰ \\ ۵۴ & ۳۶ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & -۱ \\ ۲۷ & ۲۰ \end{bmatrix}-(AB+BA)$$

پس:

$$AB+BA=\begin{bmatrix} ۵ & -۱ \\ ۲۷ & ۲۰ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۹ & ۰ \\ ۵۴ & ۳۶ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۴ & -۱ \\ -۲۷ & -۱۶ \end{bmatrix}$$

**تست** اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های سطر سوم $A^{۴}B^{۳}$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۸ ۳) $-۸$ ۴) $-۱۶$

**پاسخ** یادتان باشد! اگر $A=\begin{bmatrix} a & d & e \\ ۰ & b & f \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}$ باشد (A مثلثی باشد) و $A^{n}$ را بخواهیم $(n\in\mathbb{N})$، درایه‌های روی قطر اصلی به توان n می‌رسند و صفرها سر جایشان می‌مانند اما در مورد بقیهٔ درایه‌ها چیزی نمی‌دانیم. بنابراین:

$$A^{۴}=\begin{bmatrix} ۱^{۴} & a & b \\ ۰ & ۳^{۴} & c \\ ۰ & ۰ & (-۱)^{۴} \end{bmatrix} \;,\; B^{۳}=\begin{bmatrix} ۱^{۳} & x & y \\ ۰ & ۱^{۳} & z \\ ۰ & ۰ & ۲^{۳} \end{bmatrix} \qquad A^{۴}B^{۳}=\begin{bmatrix} ۱ & a & b \\ ۰ & ۸۱ & c \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & x & y \\ ۰ & ۱ & z \\ ۰ & ۰ & ۸ \end{bmatrix}$$

از ما مجموع درایه‌های سطر سوم $A^{۴}B^{۳}$ خواسته شده، پس کافی است سطر سوم $A^{۴}$ را در $B^{۳}$ ضرب کنیم تا سطر سوم $A^{۴}B^{۳}$ مشخص شود.

$$A^{۴}B^{۳}\text{ سطر سوم}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & x & y \\ ۰ & ۱ & z \\ ۰ & ۰ & ۸ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۸ \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های سطر سوم $A^{۴}B^{۳}$ برابر ۸ است.

**تست** اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ \frac{۱}{۲} & ۱ & \frac{۳}{۲} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه $A^{۱۳۹۹}$ کدام است؟

۱) $۳^{۱۳۹۹}A$ ۲) $۳^{۱۳۹۸}A$ ۳) $۳^{۱۳۹۹}I$ ۴) $۱۳۹۹A$

**پاسخ** **روش اول** $A^{۲}$ را به دست می‌آوریم ببینیم تکلیفمان مشخص می‌شود یا نه!

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ \frac{۱}{۲} & ۱ & \frac{۳}{۲} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ \frac{۱}{۲} & ۱ & \frac{۳}{۲} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۶ & ۹ \\ \frac{۳}{۲} & ۳ & \frac{۹}{۲} \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

اگر از تمام درایه‌های ماتریس $A^{۲}$ عدد ۳ را فاکتور بگیریم، داریم:

$$A^{۲}=۳\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ \frac{۱}{۲} & ۱ & \frac{۳}{۲} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} & ۱ \end{bmatrix}=۳A$$

باید به دنبال رابطه‌ای بین $A$، $A^2$، $A^3$ و ... باشیم.

$$A^2 = 3A$$
$$A^3 = A^2.A = (3A).A = 3A^2 = 3(3A) = 3^2 A$$
$$A^4 = A^3.A = (3^2 A).A = 3^2 A^2 = 3^2(3A) = 3^3 A, \ldots$$

خیلی ساده! می‌توان نتیجه گرفت:

$$A^{1399} = 3^{1398} A$$

اگر $A^2 = kA$ باشد، $A^n = k^{n-1} A$ است. در این تست که $A^2 = 3A$ شده، بنابراین:

$$A^{1399} = 3^{1398} A$$

---

**تست** **اگر A و B دو ماتریس مربعی و $AB = A$ و $BA = B$ باشد، حاصل $A + A^2 + \cdots + A^{1399}$ کدام است؟**

۱) $1398A$ ۲) $1399A$ ۳) $1400I$ ۴) $1400A$

**پاسخ** گزینه ۲ طرفین رابطهٔ $AB = A$ را از چپ در $A$ ضرب می‌کنیم و به جای $BA$، $B$ قرار می‌دهیم.

$$AB = A \xrightarrow{\times A} (AB)A = A^2 \Rightarrow A\underbrace{(BA)}_{B} = A^2$$

$$AB = A^2 \xrightarrow{AB=A} A = A^2$$

اگر $A^2 = A$ باشد، آن‌گاه $A^n = A \ (n \geq 2)$ است و در نتیجه داریم:

$$A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{1399} = A + A + A + \cdots + A = 1399A$$

## توان ماتریس‌ها

اگر ماتریس $A$ مربعی باشد، داریم:

$$A^1 = A$$
$$A^2 = A.A$$
$$A^3 = A.A^2 = A^2.A$$
$$\vdots$$
$$A^n = A.A^{n-1} = A^{n-1}.A$$

اگر $A$، ماتریسی مربعی، $m$ و $n$ طبیعی و $k$ عددی حقیقی باشد، آن‌گاه:

۱) $I^n = I$

۲) $(kA)^n = k^n A^n$

۳) $A^m \times A^n = A^{m+n}$

۴) $(A^m)^n = A^{mn}$

برای محاسبهٔ توان‌های ماتریس مربعی $A$ (به طور خاص در مورد توان‌های بزرگ!)، راه کلی این است که بین $A$، $A^2$، $A^3$ و ... رابطه‌ای پیدا کنیم.

---

**مثال** **اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، $A^7$ و $A^{14}$ را به دست آورید.** *(تمرین کتاب درسی)*

**پاسخ** ابتدا $A^2$ را به دست می‌آوریم.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

حالا که $A^2 = I$ شده، خیلی راحت $A^7$ و $A^{14}$ را به دست می‌آوریم.

$$A^7 = (A^2)^3 \times A = I^3 \times A = IA = A$$
$$A^{14} = (A^2)^7 = I^7 = I$$

اگر $A^2 = I$ باشد به ماتریس $A$، ماتریس متناوب گویند؛ زیرا توان‌های زوج این ماتریس برابر $I$ و توان‌های فرد آن برابر با خود ماتریس است.

---

دختران و پسران عزیز، سلام!

قبل از حل تست‌ها به نکات زیر توجه کنید!

۱) درس‌نامهٔ هر بخش را دقیق و کامل مطالعه کنید و مثال‌ها و تست‌های درس‌نامه را با دقت حل کنید.

۲) تست‌هایی که علامت دارند کمی سخت‌تر از بقیهٔ تست‌ها هستند.

۳) پس از تسلط کامل به تست‌های هر بخش سراغ تست‌های سری [z] بروید. (البته هیچ اجباری به زدن تست‌های سری [z] نیست.)

۴) در مواقع اورژانسی که برای زدن همهٔ تست‌ها وقت ندارید، تست‌های رنگی (به ویژه تست‌های کنکورهای سراسری و تمرین کتاب درسی) تسلط نسبتاً خوبی بر مطالب هر بخش برای شما ایجاد خواهند کرد.

## پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- تعریف $a_{ij}=\begin{cases} i+۲ & i=j \\ i-j & i>j \\ ۲j-i & i<j \end{cases}$، نمایش کدام ماتریس $۳\times۳$ زیر است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۵ \\ ۰ & ۴ & ۵ \\ -۲ & -۱ & ۵ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۳ & ۳ & ۵ \\ ۱ & ۴ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۵ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۳ & ۳ & ۵ \\ ۱ & ۴ & ۵ \\ -۱ & ۱ & ۵ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۵ \\ ۰ & ۴ & ۵ \\ -۱ & ۱ & ۵ \end{bmatrix}$

۲- اگر $A=[i-j^۲]_{۳\times۳}$ و $B=[۶-ij]_{۳\times۳}$، مجموع درایه‌های سطر دوم ماتریس $A+B$ کدام است؟

۱) $-۲$ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۵

۳- اگر $A=\begin{bmatrix} m & ۳ & ۴ \\ ۴ & n-۱ & ۸ \\ ۶ & ۹ & k+۱ \end{bmatrix}$، $B=[i+ij]_{۳\times۳}$ و $A=B$ باشد، آن‌گاه حاصل $m+n+k$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۷)

۱) ۶ ۲) ۲۰ ۳) ۱۶ ۴) ۲۵

۴- مجموع درایه‌های یک ماتریس اسکالر $۳\times۳$، برابر با ۱ است. حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی این ماتریس کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۷)

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) ۸ ۳) $\frac{۱}{۲۷}$ ۴) ۲۷

۵- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، کوچک‌ترین درایهٔ ماتریس $AB$ کدام است؟

۱) $-۲$ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۶- اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ و $A\times B$ یک ماتریس قطری باشد، مجموع درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی $B\times A$ کدام است؟ (برگرفته از تمرین کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۸ ۳) ۱۴ ۴) ۲۴

۷- اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۲}$ و $B=[b_{ij}]_{۲\times۳}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} i^۲-۱ & i=j \\ i-j & i>j \\ j-i & i<j \end{cases}$ و $b_{ij}=\begin{cases} i^۲+۱ & i=j \\ i+j & i>j \\ i-j+۲ & i<j \end{cases}$ باشند، $A\times B$ کدام است؟ (تمرین کتاب درسی)

۱) $\begin{bmatrix} -۳ & -۵ & -۱ \\ ۱۱ & ۱۶ & ۳ \\ ۷ & ۷ & ۱ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} -۱ & -۵ & -۵ \\ ۵ & ۱۸ & ۱۹ \\ ۵ & ۱۱ & ۱۳ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۱ \\ ۱۱ & ۱۶ & ۳ \\ ۷ & ۷ & ۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱ & ۵ & ۵ \\ ۵ & ۱۸ & ۱۹ \\ ۵ & ۱۱ & ۱۳ \end{bmatrix}$

۸- اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۷ & ۲a & ۰ \\ ۸ & ۴ & -۱ \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} ۲b & ۰ & ۰ \\ ۵ & ۴ & ۰ \\ ۵ & ۶ & ۴c \end{bmatrix}$ و $۴a+۳b-۲c=۷$ باشد، مجموع عناصر روی قطر اصلی $BA$ چه‌قدر است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۹- اگر $A=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۵ & ۲ \\ ۷ & ۱ \end{bmatrix}$، $B=[b_{ij}]=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۴ \\ ۵ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $C=A\times B=[c_{ij}]$، آن‌گاه حاصل $c_{۲۳}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱۶ ۳) ۲۲ ۴) ۲۴

۱۰- اگر $[۲ \quad ۱]\times A=[۳ \quad ۵]$ و $[۳ \quad ۴]\times A=[-۱ \quad ۲]$ باشد، حاصل $[۸ \quad ۹]\times A$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۷)

۱) $[۱ \quad ۹]$ ۲) $[۱ \quad -۹]$ ۳) $[-۱ \quad ۹]$ ۴) $[-۱ \quad -۹]$

۱۱- اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ -۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۳ \\ ۳ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} ۴ & -۱ & ۵ \\ ۱ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، درایهٔ سطر اول و ستون سوم ماتریس $ABC$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۷)

۱) ۲۱ ۲) ۷۵ ۳) ۸۰ ۴) ۱۲۰

۱۲- چند ماتریس $A_{۲\times ۲}$ وجود دارد که $A\times\begin{bmatrix}۲&۱\\ ۰&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰\\ ۸&۴\end{bmatrix}$ باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۱۳- اگر $A=\begin{bmatrix}-۱&۱\\ ۳&-۱\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۱&۲\\ \alpha&\beta\end{bmatrix}$ و ضرب دو ماتریس خاصیت جابه‌جایی داشته باشد، $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۱

۱۴- اگر ضرب دو ماتریس $\begin{bmatrix}۲&۳\\ ۳&۲\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}\sin\alpha&x^۴\\ ۸x&\cos\alpha\end{bmatrix}$ خاصیت جابه‌جایی داشته باشد $(x\neq ۰)$، حاصل $x+\tan\alpha$ کدام است؟ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۷)*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵- حاصل‌جمع ریشه‌های معادلهٔ $[۱\ \ -۱\ \ ۲]\begin{bmatrix}x&۱&-۱\\ -۱&۲&۲\\ ۰&x&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲\\ x\\ ۱\end{bmatrix}=۰$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $-۱$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

۱۶- اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $[-۱\ \ ۲\ \ ۱]\begin{bmatrix}x&۲&۱\\ ۱&-x&۰\\ -۱&۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ ۲\\ ۱\end{bmatrix}=۰$ باشند، حاصل $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$ کدام است؟ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۷)*

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۷}{۲}$ ۴) $\frac{۹}{۲}$

۱۷- اگر $\alpha$ و $\beta$، ریشه‌های معادلهٔ $[-۱\ \ ۲]\begin{bmatrix}x&۲\\ ۱&-x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ ۵\end{bmatrix}=۰$ باشند، حاصل $\alpha^۲+\beta^۲$ کدام است؟ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۷)*

۱) ۸۴ ۲) ۵۴ ۳) ۴۴ ۴) معادله جواب ندارد.

۱۸- اگر $B$ و $A$ هر دو $۲\times۲$ باشند و $BA=\begin{bmatrix}۰&-۱\\ ۲&۳\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $B\begin{bmatrix}-۲&۱\\ ۳&۰\end{bmatrix}A+B\begin{bmatrix}-۱&-۱\\ -۳&-۳\end{bmatrix}A$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $-۲$ ۳) $-۶$ ۴) $-۱۲$

۱۹- اگر $A$ و $B$ دو ماتریس متمایز باشند به طوری که $AB=A$ و $BA=B$، آن‌گاه $B^۲$ برابر با کدام است؟ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۷)*

۱) $I$ ۲) $A$ ۳) $B$ ۴) $-I$

۲۰- اگر $A-B=-kI$ باشد، حاصل $A^۲-AB+kB$ کدام است؟

۱) $k^۲$ ۲) $k^۲I$ ۳) $-k^۲$ ۴) $-k^۲I$

۲۱- اگر $AB=B$ و $BA=A$ باشد، $A^۲B^۲$ کدام است؟

۱) $I$ ۲) $A$ ۳) $B$ ۴) $A^۲$

۲۲- اگر $B^۲=-B$ و $A+B=I$ باشد، $A^۲B$ کدام است؟

۱) $-۴B$ ۲) $-۲B$ ۳) $۲B$ ۴) $۴B$

۲۳- اگر $A$ و $B$ دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، $B^۲=B+I$ و $B-A=I$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $AB=BA$ ۲) $BA=I$ ۳) $A^۲B=A$ ۴) $B^۲A=I$

۲۴- اگر $A=\begin{bmatrix}۱&-۱\\ m&۱\end{bmatrix}$ و $A^۲=\begin{bmatrix}a_{۱۱}&a_{۱۲}\\ -۶&a_{۲۲}\end{bmatrix}$، $m$ کدام است؟

۱) $-۳$ ۲) $-۲$ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۵- اگر $A=\begin{bmatrix}-۲&۱\\ ۵&۴\end{bmatrix}$ و $A^۲=\alpha A+\beta I$، دوتایی $(\alpha,\beta)$ کدام است؟ *(سراسری ریاضی ۸۴)*

۱) $(۲,۱۱)$ ۲) $(۲,۱۳)$ ۳) $(۴,۱۱)$ ۴) $(۴,۳)$

۲۶- ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases}۱ & i=j\\ ۲ & i\neq j\end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های ماتریس $A^۲-۴A$ کدام است؟ *(ریاضی خارج ۹۶)*

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۲۷- اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^{۷}-A^{۴}$ کدم است؟ *(سراسری ریاضی ۸۳)*

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۳ & -۳ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۳ & -۳ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۲ & -۳ \end{bmatrix}$

۲۸- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & x & y \\ ۰ & ۱ & x \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس $A^{۳}$ کدام است؟

۱) $۳x$ ۲) $۳y$ ۳) $۲(x^{۲}+y^{۲})$ ۴) $۳(x^{۲}+y^{۲})$

۲۹- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $(A+I)^{۶}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ آن‌گاه $a-b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $-۱$ ۳) ۱ ۴) ۳۶

۳۰- در ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، حاصل‌جمع درایه‌های ماتریس $A+A^{۲}+A^{۳}+A^{۴}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۳۱- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، در ماتریس $A^{۶}$ مجموع درایه‌های ستون دوم کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۲۷

۳۲- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل‌جمع درایه‌های سطر اول ماتریس $A^{۶}$ کدام است؟

۱) ۳۱ ۲) ۳۷ ۳) $(۲\times ۳^{۵})+۱$ ۴) $(۲\times ۳^{۶})+۱$

۳۳- اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$، ماتریس $A^{۴}$ کدام می‌باشد؟ *(ریاضی خارج ۹۲)*

۱) بالامثلثی ۲) پایین‌مثلثی ۳) قطری غیرهمانی ۴) همانی

۳۴- اگر $A=\begin{bmatrix} -۱ & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های $A^{۵}$ کدام است؟

۱) $-۳^{۷}$ ۲) $۳^{۷}$ ۳) $-۳^{۶}$ ۴) $۳^{۶}$

۳۵- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۱۲}+A^{۱۳}$ کدام است؟ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۷)*

۱) ۲۷ ۲) ۲۸ ۳) ۲۹ ۴) ۳۰

۳۶- اگر $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۰ \\ ۲ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های روی قطر اصلی $B^{۲}A$ کدام است؟

۱) $-۹$ ۲) $-۵$ ۳) $-۱$ ۴) ۹

۳۷- اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۵ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -\frac{۱}{۵} & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، $B=I-A$ و $C=A+I$ باشد، ماتریس $B^{۲}+C^{۲}$ کدام است؟

۱) $-۴A$ ۲) $-۴I$ ۳) $۴I$ ۴) $۴A$

۳۸- برای دو ماتریس A و B داریم $A^{۲}=\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ -۳ & ۳ \end{bmatrix}$، $B^{۲}=\begin{bmatrix} ۷ & ۳ \\ ۹ & ۷ \end{bmatrix}$ و $A+B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$، حاصل $AB+BA$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۶ & ۶ \\ ۶ & ۳ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۳ & ۳ \\ ۳ & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix}$

۳۹- سه ماتریس دارای رابطهٔ $A=B+C$ می‌باشند، حاصل $A^2+B^2-AB-BA$ کدام است؟

۱) $-C^2$ ۲) $\bar{O}$ ۳) $C$ ۴) $C^2$

۴۰- ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}x & y\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-4 & -3\\ -3 & -4\end{bmatrix}$ در رابطهٔ $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ صدق می‌کنند، حاصل $[x \quad 2 \quad -y]\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -x\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $-3$ ۲) $1$ ۳) $3$ ۴) $5$

۴۱- ماتریس‌های مربعی A و B در رابطهٔ $B=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -1\\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}-A$ صدق می‌کنند، مجموع درایه‌های ماتریس $(A^2+AB+BA+B^2)^3$ کدام است؟

۱) $-2$ ۲) $-1$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

۴۲- اگر A یک ماتریس مربعی و $A^2-I=2A$ باشد، $A^5-A^4$ کدام است؟

۱) $29A+12I$ ۲) $17A+7I$ ۳) $12A+5I$ ۴) $A$

۴۳- اگر $BA=2A$ و $AB=B$ باشد، $2A^7-3A^4$ کدام است؟

۱) $-A$ ۲) $\bar{O}$ ۳) $A$ ۴) $2A$

۴۴- A و B دو ماتریس مربعی و $AB=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{bmatrix}$ است، مجموع درایه‌های ماتریس $A(BA)^4B$ کدام است؟

۱) $-1$ ۲) صفر ۳) $1$ ۴) $2$

۴۵- اگر $AB-2BA=\bar{O}$ و $B^3A=kAB^3$ باشد، k کدام است؟

۱) $8$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $-\frac{1}{8}$ ۴) $-8$

۴۶- اگر $A^2=-\frac{3}{2}A$ و $2A+3B=\bar{O}$ باشد، حاصل $A(A+B)(2A-B)(A-B)$ کدام است؟

۱) $5A$ ۲) $-5A$ ۳) $-5I$ ۴) $5I$

## آزمونک

۴۷- اگر درایه‌های سطر ۴ ماتریس A، $-1,2,5,0$ و درایه‌های ستون سوم ماتریس B، $0,5,2,-1$ باشند، درایهٔ سطر چهارم و ستون سوم ماتریس AB کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

۴۸- حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $[1 \quad -1 \quad 2]\begin{bmatrix}2 & 1 & x\\ -x & 0 & -1\\ 3 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ -10\\ -x\end{bmatrix}=0$ کدام است؟

۱) $-14$ ۲) $-9$ ۳) $-5$ ۴) $-1$

۴۹- اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $A^6$ کدام است؟

۱) $3^5$ ۲) $3^6$ ۳) $3^7$ ۴) $3^8$

۵۰- اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند و $BA-3AB=\bar{O}$، مقدار m از رابطهٔ $mAB^3=B^3A$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{1}{27}$ ۲) $-27$ ۳) $-\frac{1}{27}$ ۴) $27$

۵۱- اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، به طوری که $A^2=A$ و $A+B=I$ باشد، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $AB=BA$ ۲) $AB=I$ ۳) $AB^2=I$ ۴) $A=B^2$

۵۲- حاصل $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}1 & 0\\ 10 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -11 & 1\end{bmatrix}$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۶)

۱) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 8 & 1\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ -6 & 1\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}1 & 8\\ -6 & 1\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}1 & 8\\ 5 & 1\end{bmatrix}$

۵۳- اگر $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ ، حاصل $A^{1400}-A^{1399}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{bmatrix}$
۴) $\bar{O}$

۵۴- در ماتریس $A=\begin{bmatrix}0&2\\1&0\end{bmatrix}$ حاصل $A^n-A^{n-1}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}0&2\\0&0\end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix}0&2^{n-1}\\0&0\end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix}0&2^{n-1}\\1&0\end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix}0&2\\1&0\end{bmatrix}$

۵۵- اگر $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}1&4\\2&3\end{bmatrix}$ و $BA^n=\begin{bmatrix}41&4\\32&3\end{bmatrix}$ ، آن‌گاه:

۱) $n=11$
۲) $n=10$
۳) $n=9$
۴) $n=8$

۵۶- اگر $A$ یک ماتریس مربعی باشد به طوری که $A^2-A=\bar{O}$ ، آن‌گاه $(2A-I)^{1399}$ کدام است؟

۱) $\bar{O}$
۲) $I$
۳) $A$
۴) $2A-I$

۵۷- اگر $A=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}13&5\\15&-7\end{bmatrix}$ باشند، حاصل $(B^{-1}AB)^{14}$ کدام است؟

۱) $-A$
۲) $A$
۳) $I$
۴) $-I$

**۱- گزینهٔ ۲** صورت کلی یک ماتریس ۳×۳ به شکل زیر است:

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

۱ هر جا شمارهٔ سطر و ستون درایه برابر بودند کافی است شمارهٔ سطر را با ۲ جمع کنیم و به جای آن درایه بنویسیم. (درایه‌های $a_{۱۱}$، $a_{۲۲}$ و $a_{۳۳}$ این‌طور هستند.)

۲ هر جا شمارهٔ سطر از شمارهٔ ستون بزرگ‌تر بود، شمارهٔ سطر را منهای شمارهٔ ستون می‌کنیم و به جای آن درایه می‌نویسیم. (درایه‌های $a_{۲۱}$، $a_{۳۱}$ و $a_{۳۲}$ این ویژگی را دارند.)

۳ هر جا شمارهٔ سطر از شمارهٔ ستون کوچک‌تر بود، دو برابر شمارهٔ ستون را منهای شمارهٔ سطر می‌کنیم و به جای آن درایه می‌نویسیم. ($a_{۱۲}$، $a_{۱۳}$ و $a_{۲۳}$ چنین خصوصیتی دارند.)

$$A=\begin{bmatrix} ۱+۲ & ۲\times۲-۱ & ۲\times۳-۱ \\ ۲-۱ & ۲+۲ & ۲\times۳-۲ \\ ۳-۱ & ۳-۲ & ۳+۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۳ & ۵ \\ ۱ & ۴ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۵ \end{bmatrix}$$

---

**۲- گزینهٔ ۱** نیازی نیست هر دو ماتریس را بنویسیم و با هم جمع کنیم! بلکه کافی است سطر دوم هر دو ماتریس را به دست آوریم و با هم جمع کنیم.

$$a_{۲۱}=۲-۱^۲=۱,\ a_{۲۲}=۲-۲^۲=-۲,\ a_{۲۳}=۲-۳^۲=-۷$$

$$,b_{۲۱}=۶-(۲\times۱)=۴,\ b_{۲۲}=۶-(۲\times۲)=۲$$

$$,b_{۲۳}=۶-(۲\times۳)=۰$$

بنابراین: $A+B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & -۷ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۴ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & ۰ & -۷ \end{bmatrix}$

مجموع درایه‌های سطر دوم $A+B$ برابر با $۵+۰-۷=-۲$ است.

---

**۳- گزینهٔ ۲** ابتدا طبق تعریف، درایه‌های ماتریس B را می‌نویسیم:

$$B=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۶ & ۸ \\ ۶ & ۹ & ۱۲ \end{bmatrix}$$

A و B با هم مساوی‌اند، پس درایه‌های آن‌ها باید نظیربه‌نظیر با هم برابر باشند؛ یعنی:

$$\begin{cases} m=۲ \\ n-۱=۶ \Rightarrow n=۷ \\ k+۱=۱۲ \Rightarrow k=۱۱ \end{cases}$$

بنابراین: $m+n+k=۲+۷+۱۱=۲۰$

---

**۴- گزینهٔ ۳** ماتریس اسکالر، ماتریسی است **قطری** که درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابرند.

ماتریس اسکالر ۳×۳ به صورت $A=\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & a & ۰ \\ ۰ & ۰ & a \end{bmatrix}$ است که مجموع درایه‌های آن $۳a$ است؛ بنابراین داریم: $۳a=۱ \Rightarrow a=\frac{۱}{۳}$

حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی این ماتریس برابر است با: $a^۳=\frac{۱}{۲۷}$

---

**۵- گزینهٔ ۱** باید A و B را ضرب کنیم تا کوچک‌ترین درایه مشخص شود!

$$AB=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & -۲ & ۲ \\ -۲ & ۴ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

کوچک‌ترین درایهٔ ماتریس AB، ۲- است.

---

**۶- گزینهٔ ۴** همین اول کار باید تکلیف $A\times B$ را روشن کنیم!

$$AB=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴+۳a & ۲a-۸ \\ b-۳ & -۲b-۲ \end{bmatrix}$$

برای این‌که $A\times B$ قطری باشد باید درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر باشند، پس:

$$\begin{cases} b-۳=۰ \Rightarrow b=۳ \\ ۲a-۸=۰ \Rightarrow a=۴ \end{cases}$$

حالا که A و B را داریم، $B\times A$ را می‌یابیم.

$$BA=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ & ۴ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲ & ۶ \\ ۱۸ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی $B\times A$ برابر است با: $۶+۱۸=۲۴$

اگر $A\times B$ قطری باشد، دلیلی وجود ندارد که $B\times A$ هم قطری باشد.

---

**۷- گزینهٔ ۳** اول باید A و B را مشخص کنیم.

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱^۲-۱ & ۲-۱ \\ ۲-۱ & ۲^۲-۱ \\ ۳-۱ & ۳-۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & b_{۱۳} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & b_{۲۳} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱^۲+۱ & ۱-۲+۲ & ۱-۳+۲ \\ ۲+۱ & ۲^۲+۱ & ۲-۳+۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۵ & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$AB=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۵ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۱ \\ ۱۱ & ۱۶ & ۳ \\ ۷ & ۷ & ۱ \end{bmatrix}$$

---

**۸- گزینهٔ ۱** هر چند که کتاب فراموش کرده!!! ماتریس مثلثی را معرفی کند؛ اما ما معرفی می‌کنیم!

ماتریسی که درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر باشند را ماتریس پایین‌مثلثی و ماتریسی که درایه‌های پایین قطر اصلی آن صفر باشند را بالامثلثی گویند.

یادتان بماند که: ۱ ضرب دو ماتریس بالامثلثی، بالامثلثی و ضرب دو ماتریس پایین‌مثلثی، پایین‌مثلثی است.

۲ عناصر روی قطر اصلی حاصلضرب دو ماتریس پایین‌مثلثی (یا بالامثلثی) برابر با حاصل‌ضرب نظیربه‌نظیر عناصر روی قطر اصلی دو ماتریس است؛ یعنی:

$$\begin{bmatrix} a & d & e \\ ۰ & b & f \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' & d' & e' \\ ۰ & b' & f' \\ ۰ & ۰ & c' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} aa' & ? & ? \\ ۰ & bb' & ? \\ ۰ & ۰ & cc' \end{bmatrix}$$

حالا که می‌دانیم ماتریس مثلثی چه شکلیه! سراغ حل سؤال می‌رویم.

سؤال از ما عناصر روی قطر اصلی ضرب دو ماتریس پایین‌مثلثی را خواسته!

$$BA=\begin{bmatrix} ۲b & ۰ & ۰ \\ ۵ & ۴ & ۰ \\ ۵ & ۶ & ۴c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۷ & ۲a & ۰ \\ ۸ & ۴ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۶b & ۰ & ۰ \\ ? & ۸a & ۰ \\ ? & ? & -۴c \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های روی قطر اصلی BA برابر است با:

$$۶b+۸a-۴c=۲(۳b+۴a-۲c)=۲\times۷=۱۴$$

---

**۹- گزینهٔ ۳** اگر $A\times B=C$ باشد، درایهٔ واقع در سطر iام و ستون jام ماتریس C از ضرب سطر iام ماتریس A در ستون jام ماتریس B به دست می‌آید، بنابراین درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس C از ضرب سطر دوم A در ستون سوم B به دست می‌آید.

$$C_{۲۳}=\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ \\ ۱ \end{bmatrix}=(۵\times۴)+(۲\times۱)=۲۲$$

**۱۰- گزینهٔ ۱** با توجه به معادلات داده‌شده، A یک ماتریس ۲×۲ است.

اگر $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ باشد، داریم:

$$[2\ \ 1]\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=[3\ \ 5]\Rightarrow\begin{cases}2a+c=3\\2b+d=5\end{cases}\qquad(1)$$

$$[3\ \ 4]\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=[-1\ \ 2]\Rightarrow\begin{cases}3a+4c=-1\\3b+4d=2\end{cases}\qquad(2)$$

دو برابر معادلات (۲) را با معادلات (۱) جمع می‌کنیم، داریم:

$$\begin{cases}(2a+c)+2(3a+4c)=3+2(-1)\ \Rightarrow\ 8a+9c=1\\(2b+d)+2(3b+4d)=5+2(2)\ \Rightarrow\ 8b+9d=9\end{cases}$$

$$\Rightarrow[8\ \ 9]\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=[1\ \ 9]$$

**۱۱- گزینهٔ ۲** برای به دست آوردن سطر iام و ستون jام ماتریس ABC، کافی است به ترتیب سطر iام ماتریس A، ماتریس B و ستون jام ماتریس C را در هم ضرب کنیم. بنابراین:

$$ABC\ \text{سطر اول و ستون سوم}=[A\ \text{سطر اول}]B\begin{bmatrix}\text{ستون سوم}\\C\end{bmatrix}$$

$$ABC\ \text{سطر اول و ستون سوم}=[2\ \ 3\ \ 4]\begin{bmatrix}1&-1&2\\1&0&3\\3&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\-1\\0\end{bmatrix}$$

$$=[17\ \ 10\ \ 17]\begin{bmatrix}5\\-1\\0\end{bmatrix}=85-10=75$$

**۱۲- گزینهٔ ۴** فرض می‌کنیم $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ باشد، بنابراین:

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\8&4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2a&a\\2c&c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\8&4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\c=4\end{cases}$$

در ماتریس A باید $a=0$ و $c=4$ باشد و برای این‌که رابطهٔ داده‌شده برقرار باشد به مقدار b و d بستگی ندارد، یعنی به ازای هر عدد حقیقی b و d، $a=0$ و $c=4$ معادلهٔ ماتریسی داده‌شده برقرار است، پس بی‌شمار ماتریس A وجود دارد که در رابطهٔ داده‌شده، صدق کند.

**۱۳- گزینهٔ ۱** ضرب دو ماتریس A و B خاصیت جابه‌جایی دارد، یعنی $AB=BA$ است.

$$AB=\begin{bmatrix}-1&1\\3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\\alpha&\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha-1&\beta-2\\3-\alpha&6-\beta\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}1&2\\\alpha&\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\\3&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-1\\3\beta-\alpha&\alpha-\beta\end{bmatrix}$$

از برابری AB و BA داریم: $\begin{bmatrix}\alpha-1&\beta-2\\3-\alpha&6-\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-1\\3\beta-\alpha&\alpha-\beta\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha-1=5\ \Rightarrow\ \alpha=6\\\beta-2=-1\ \Rightarrow\ \beta=1\end{cases}\Rightarrow\ \alpha+\beta=7$$

که به ازای $\alpha=6$ و $\beta=1$، $3-\alpha=3\beta-\alpha$ و $6-\beta=\alpha-\beta$ برقرار است.

**۱۴- گزینهٔ ۳** اگر دو ماتریس A و B بخواهند تعویض‌پذیر باشند (خاصیت جابه‌جایی داشته باشند)، باید $AB=BA$ باشد.

اما راه ساده‌تری هم برای حل این تست وجود دارد.

ضرب دو ماتریس به فرم $\begin{bmatrix}a&b\\b&a\end{bmatrix}$ خاصیت جابه‌جایی دارند.

در ماتریس $\begin{bmatrix}2&3\\3&2\end{bmatrix}$ درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابر و درایه‌های روی قطر فرعی نیز با هم برابرند؛ اگر در ماتریس $\begin{bmatrix}\sin\alpha&x^4\\8x&\cos\alpha\end{bmatrix}$ نیز درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابر و درایه‌های روی قطر فرعی با هم برابر باشند، ضرب دو ماتریس خاصیت جابه‌جایی دارد.

بنابراین: $\sin\alpha=\cos\alpha\ \Rightarrow\ \tan\alpha=1$

$$x^4=8x\ \xrightarrow{x\neq0}\ x^3=8\ \Rightarrow\ x=2$$

پس: $x+\tan\alpha=2+1=3$

**۱۵- گزینهٔ ۱** اول حاصل‌ضرب دو ماتریس $[1\ \ -1\ \ 2]$ و $\begin{bmatrix}x&1&-1\\-1&2&2\\0&x&1\end{bmatrix}$ را به دست می‌آوریم.

$$[1\ \ -1\ \ 2]\begin{bmatrix}x&1&-1\\-1&2&2\\0&x&1\end{bmatrix}=[x+1\ \ 2x-1\ \ -1]$$

حالا باید حاصل بالا را در $\begin{bmatrix}-2\\x\\1\end{bmatrix}$ ضرب کنیم و برابر صفر قرار دهیم.

$$[x+1\ \ 2x-1\ \ -1]\begin{bmatrix}-2\\x\\1\end{bmatrix}=0\ \Rightarrow\ -2x-2+2x^2-x-1=0$$

پس جمع ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-3x-3=0$ برابر با $\frac{3}{2}=-\frac{-3}{2}$ است.

جمع ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ برابر با $-\frac{b}{a}$ است.

**۱۶- گزینهٔ ۲** حاصل‌ضرب دو ماتریس اول را به دست می‌آوریم و در ماتریس سوم ضرب می‌کنیم:

$$[-1\ \ 2\ \ 1]\begin{bmatrix}x&2&1\\1&-x&0\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\2\\1\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow[-x+1\ \ -2x-1\ \ 0]\begin{bmatrix}x\\2\\1\end{bmatrix}=-x^2+x-4x-2=0$$

$$\Rightarrow x^2+3x+2=0$$

α و β ریشه‌های معادلهٔ فوق هستند.

$$(x+2)(x+1)=0\ \Rightarrow\ \alpha=-2,\beta=-1$$

بنابراین: $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

**۱۷- گزینهٔ ۳** حاصل‌ضرب دو ماتریس اول را به دست می‌آوریم و در ماتریس سوم ضرب می‌کنیم:

$$[-1\ \ 2]\begin{bmatrix}x&2\\1&-x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\5\end{bmatrix}=\left([-1\ \ 2]\begin{bmatrix}x&2\\1&-x\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x\\5\end{bmatrix}$$

$$=[-x+2\ \ -2-2x]\begin{bmatrix}x\\5\end{bmatrix}=-x^2+2x-10-10x$$

$$=-x^2-8x-10=0\ \Rightarrow\ x^2+8x+10=0$$

چون $\Delta = ۸^۲ - ۴\times۱\times۱۰ > ۰$ است، پس معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد.

می‌دانیم $\alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta$ و $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ فوق هستند؛ بنابراین: $\alpha+\beta=-۸ \,,\, \alpha\beta=۱۰$

$$\alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta=(-۸)^۲-۲(۱۰)=۶۴-۲۰=۴۴$$

اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، آن‌گاه:

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a} \quad \text{و} \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

---

۱۸- گزینهٔ ۴ $B$ را از سمت چپ فاکتور می‌گیریم، داریم:

$$B(\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ ۳ & ۰\end{bmatrix}A+\begin{bmatrix}-۱ & -۱\\ -۳ & -۳\end{bmatrix}A)=B(\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ ۳ & ۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۱ & -۱\\ -۳ & -۳\end{bmatrix})A$$

با جمع دو ماتریس بین $B$ و $A$، نتیجهٔ جالبی به دست می‌آید.

$$B(\begin{bmatrix}-۳ & ۰\\ ۰ & -۳\end{bmatrix})A=B(-۳I)A=-۳(BI)A=-۳BA$$

$$=-۳\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۳\\ -۶ & -۹\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس فوق برابر با $۰+۳-۶-۹=-۱۲$ است.

---

۱۹- گزینهٔ ۳ از قبل با خاصیت شرکت‌پذیری در ضرب ماتریس‌ها آشنا هستیم: $(AB)C=A(BC)$

با استفاده از خاصیت شرکت‌پذیری و مفروضات داده‌شده در تست داریم:

$$B^۲=B\times B=(BA)B=B(AB)=BA=B$$

---

۲۰- گزینهٔ ۲ با فاکتورگیری $A$ از رابطهٔ $A^۲-AB+kB$ و جایگزین‌کردن $-kI$ به جای $A-B$ داریم:

$$A(A-B)+kB=A(-kI)+kB=-kA+kB$$

$$=-k(A-B)=-k(-kI)=k^۲I$$

---

۲۱- گزینهٔ ۳ از رابطهٔ داده‌شده باید $A^۲$ و $B^۲$ بسازیم.

با ضرب طرفین رابطهٔ $AB=A$ در $B$ (از چپ) داریم:

$$AB=B \xrightarrow{B\times} (BA)B=B^۲ \xrightarrow{BA=A} AB=B^۲$$

$$\xrightarrow{AB=B} B=B^۲$$

با ضرب طرفین رابطهٔ $BA=A$ در $A$ (از چپ) داریم:

$$BA=A \xrightarrow{A\times} (AB)A=A^۲$$

$$\xrightarrow{AB=B} BA=A^۲ \xrightarrow{BA=A} A=A^۲$$

بنابراین: $A^۲B^۲=AB=B$

این‌طوری هم می‌شد ...

$$AB=B \xrightarrow{\times A} A(BA)=BA \xrightarrow{BA=A} A^۲=A$$

$$BA=A \xrightarrow{\times B} B(AB)=AB \xrightarrow{AB=B} B^۲=B$$

پس: $A^۲B^۲=AB=B$

---

۲۲- گزینهٔ ۴ از رابطهٔ $A+B=I$ نتیجه می‌گیریم $B=I-A$ است.

درست است که در حالت کلی اتحادها در ماتریس‌ها برقرار نیستند؛ اما چون ضرب $A$ و $I$ تعویض‌پذیر است $(AI=IA=A)$، اتحادهای درجهٔ ۲ در مورد $A$ و $I$ برقرارند (یک‌وقت فکر نکنید اتحادهای درجه ۳ برقرار نیستند، چون این‌جا کاری با آن‌ها نداریم در مورد آن‌ها حرفی نمی‌زنیم!)، بنابراین:

$$B^۲=(I-A)^۲=I^۲-۲AI+A^۲ \Rightarrow B^۲=A^۲-۲A+I$$

$$\xrightarrow{B^۲=-B} -B=A^۲-A+(-A+I) \xrightarrow{I-A=B}$$

$$-B=A^۲-A+B \Rightarrow A^۲=A-۲B \xrightarrow{\pm B}$$

$$A^۲=A+\underbrace{B-B}-۲B \xrightarrow{A+B=I} A^۲=I-۳B$$

حالا باید $A^۲B$ را بیابیم.

$$A^۲=I-۳B \xrightarrow{\times B} A^۲B=(I-۳B)B \Rightarrow A^۲B=IB-۳B^۲$$

با توجه به این‌که $B^۲=-B$ است، داریم:

$$A^۲B=B-۳B^۲ \Rightarrow A^۲B=B-۳(-B) \Rightarrow A^۲B=۴B$$

مثال هم چیز خوبی است!

فرض کنید $B=-I$ و $A=۲I$ باشد که در هر دو رابطهٔ $B^۲=-B$ و $A+B=I$ صدق می‌کنند، باید $A^۲B$ را به دست آوریم.

$$A^۲B=(۲I)^۲(-I)=(۴I^۲)(-I)=-۴I$$

در گزینه‌ها به جای $B$، $-I$ قرار می‌دهیم، هر کدام که $-۴I$ داد قابل‌قبول است؛ ۴ $-۴I$ می‌دهد، پس همین گزینه درست است.

---

۲۳- گزینهٔ ۴ طرفین رابطهٔ $B-A=I$ را از چپ در $B$ ضرب می‌کنیم تا $B^۲$ ایجاد شود.

$$B-A=I \xrightarrow{B\times} B^۲-BA=BI \Rightarrow B^۲-BA=B \quad (۱)$$

یک بار هم طرفین رابطه را از راست در $B$ ضرب می‌کنیم.

$$B-A=I \xrightarrow{\times B} B^۲-AB=IB \Rightarrow B^۲-AB=B \quad (۲)$$

از دو رابطهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: $\boxed{AB=BA}$

از رابطه‌های (۱) و (۲) و $B^۲=B+I$ نتایج دیگری هم می‌توانیم بگیریم:

$$B^۲-BA=B \xrightarrow{B^۲=B+I} (B+I)-BA=B$$

$$\Rightarrow \boxed{BA=I} \xrightarrow{B\times} \boxed{B^۲A=B}$$

$$B^۲-AB=B \xrightarrow{B^۲=B+I} (B+I)-AB=B$$

$$\Rightarrow \boxed{AB=I} \xrightarrow{A\times} \boxed{A^۲B=A}$$

---

۲۴- گزینهٔ ۱ می‌دانیم $A^۲=A\times A$، پس:

$$A^۲=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ m & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ m & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱-m & -۲\\ ۲m & ۱-m\end{bmatrix}$$

بنابراین باید:

$$\begin{bmatrix}۱-m & -۲\\ ۲m & ۱-m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲}\\ -۶ & a_{۲۲}\end{bmatrix} \Rightarrow ۲m=-۶ \Rightarrow m=-۳$$

---

۲۵- گزینهٔ ۲ *بدون فوت وقت!* $A^۲$ را به دست می‌آوریم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ ۵ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ ۵ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۹ & ۲\\ ۱۰ & ۲۱\end{bmatrix}$$

$I=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ را از قبل می‌شناسیم. (بله! $I$ ماتریس همانی است.)

$$A^۲=\alpha A+\beta I \Rightarrow \begin{bmatrix}۹ & ۲\\ ۱۰ & ۲۱\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ ۵ & ۴\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}۹ & ۲\\ ۱۰ & ۲۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲\alpha & \alpha\\ ۵\alpha & ۴\alpha\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta & ۰\\ ۰ & \beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta-۲\alpha & \alpha\\ ۵\alpha & ۴\alpha+\beta\end{bmatrix}$$

کاملاً واضح است که $\alpha=۲$ است. با قراردادن $\alpha=۲$ در معادلهٔ $\beta-۲\alpha=۹$، داریم: $\beta-۴=۹ \Rightarrow \beta=۱۳$

بنابراین دوتایی $(\alpha,\beta)$، $(۲,۱۳)$ است.

شاید اسم مرحوم همیلتن و شادروان کِیلی به گوشتان خورده باشد! نخستین بار مفهوم ماتریس در کارهای این دو نفر طرح شده.

رابطه‌ای به نام کیلی- همیلتن نام‌گذاری شده که در حل این سؤال به ما کمک می‌کند.

رابطهٔ کِیلی ـ همیلتن می‌گوید: «هر ماتریس $2\times 2$ به شکل $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ در رابطهٔ $A^2-(a+d)A+|A|I=\bar{O}$ صدق می‌کند.»

به کمک رابطهٔ کِیلی ـ همیلتن داریم: $A^2-(-2+4)A+(-8-5)I=\bar{O}$

$$\Rightarrow A^2=2A+13I \Rightarrow \alpha=2,\beta=13$$

دترمینان ماتریس $A$ برابر است با:

$$|A|=\begin{vmatrix}-2&1\\5&4\end{vmatrix}=(-2\times 4)-(1\times 5)=-13$$

---

**۲۶- گزینهٔ ۲** اول ماتریس را مشخص می‌کنیم. $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$

حالا $A^2$ و $4A$ را به دست می‌آوریم و مجموع درایه‌های $A^2-4A$ را به عنوان جواب اعلام می‌کنیم.

$$A^2=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix}$$

بنابراین: $A^2-4A=\begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&8&8\\8&4&8\\8&8&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}$

مجموع درایه‌های ماتریس $A^2-4A$ برابر با ۱۵ است.

---

**۲۷- گزینهٔ ۲** ابتدا $A^2$ را پیدا می‌کنیم تا بعد ببینیم چه اتفاقی می‌افتد ...

$$A^2=\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$$

حالا که $A^2$ پیدا شد، می‌توانیم $A^3$ و $A^4$ و ... را پیدا کنیم.

$$A^3=A^2\times A=IA=A \qquad A^4=A^3\times A=A\times A=A^2=I$$

$$A^5=A^4\times A=IA=A \qquad A^6=A^5\times A=A\times A=A^2=I$$

$$A^7=A^6\times A=IA=A$$

بنابراین: $A^7-A^4=A-I=\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\3&-3\end{bmatrix}$

بد نیست بدانید که اگر $A^2=I$ باشد به ماتریس $A$ متناوب می‌گویند؛ توان‌های زوج ماتریس $A$ برابر $I$ و توان‌های فرد ماتریس $A$ برابر با خود ماتریس $A$ می‌شوند.

در این سؤال $A^2=I$ شده، پس $A^7=A$ و $A^4=I$ است و ...

---

**۲۸- گزینهٔ ۱** با توجه به دو نکتهٔ زیر به سؤال پاسخ می‌دهیم.

۱ اگر $C\times D=E$ باشد، درایهٔ واقع در سطر iام و ستون jام ماتریس $E$ از ضرب سطر iام ماتریس $C$ در ستون jام ماتریس $D$ به دست می‌آید.

۲ می‌دانیم $A^3=A^2\times A$

بنابراین درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس $A^3$ از ضرب **سطر دوم ماتریس $A^2$ در ستون سوم ماتریس $A$** به دست می‌آید.

به درایه‌های سطر دوم ماتریس $A^2$ نیاز داریم که از ضرب سطر دوم $A$ در ماتریس $A$ به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix}0&1&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&x&y\\0&1&x\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&2x\end{bmatrix}$$

حالا می‌توانیم درایهٔ سطر دوم و ستون سوم $A^3$ را به دست آوریم.

درایهٔ سطر دوم و ستون سوم $A^3$

$=$ (سطر دوم ماتریس $A^2$) $\times$ (ستون سوم ماتریس $A$)

$$=\begin{bmatrix}0&1&2x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\x\\1\end{bmatrix}=0+x+2x=3x$$

می‌توانستیم $A^2$ را به دست آوریم و در $A$ ضرب کنیم تا $A^3$ به دست آید و از روی $A^3$، درایهٔ سطر دوم و ستون سوم را اعلام کنیم.

---

**۲۹- گزینهٔ ۳** ماتریس همانی $(I)$ را می‌شناسیم (درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس همانی ۱ و درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفرند).

$$A+I=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$$

بدون معطلی باید توان‌های دوم و سوم و بعد توان ششم $A+I$ را پیدا کنیم.

$$(A+I)^2=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&4\\4&5\end{bmatrix}$$

$$(A+I)^3=\begin{bmatrix}5&4\\4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14&13\\13&14\end{bmatrix}$$

$$(A+I)^6=(A+I)^3\,(A+I)^3$$

$$=\begin{bmatrix}14&13\\13&14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}14&13\\13&14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}365&364\\364&365\end{bmatrix}$$

بنابراین: $a-b=365-364=1$

از روی $(A+I)^2$ و $(A+I)^3$ نیز می‌شد حدس زد که $a-b$ برابر یک می‌شود!

---

**۳۰- گزینهٔ ۲** به نظر می‌آید راهی به جز به توان رساندن نداریم!

$$A^2=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\bar{O}$$

از به دست آوردن $A^4$ راحت شدیم! $A^4=A^3\times A=\bar{O}$

بنابراین: $A+A^2+A^3+A^4=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+\bar{O}+\bar{O}$

$$=\begin{bmatrix}0&1&2\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس $A+A^2+A^3+A^4$ برابر با $1+2+1=4$ است.

توان سوم به بعد ماتریس‌های $\begin{bmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}0&0&0\\a&0&0\\b&c&0\end{bmatrix}$،

صفر است. (قدیما می‌گفتند! این ماتریس‌ها پوچ‌توان از مرتبهٔ ۳ هستند؛ یعنی $A^{۳}=\bar{O} \Rightarrow A^{n\geq ۳}=\bar{O}$ ، $A^{۳}=\bar{O}$ و $A^{۴}=\bar{O}$ است، بنابراین فقط $A+A^{۲}$ را به دست می‌آوریم.

$$A+A^{۲}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس $A+A^{۲}+A^{۳}+A^{۴}$ برابر ۴ است.

**۳۱- گزینهٔ ۳** به نظر می‌آید راهی غیر از یافتن $A^{۲}$، $A^{۳}$ و ... نداریم.

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=A^{۲}\times A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۶ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A^{۶}=A^{۳}\times A^{۳}=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۶ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۶ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۶ & ۲۱ \\ ۰ & ۱ & ۶ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

ما فقط ستون دوم ماتریس $A^{۶}$ را می‌خواستیم (می‌توانستیم فقط درایه‌های سطر اول، دوم و سوم را در درایه‌های ستون دوم ضرب و با هم جمع کنیم).

$A^{۶}$ مجموع درایه‌های ستون دوم $=۶+۱+۰=۷$

**۳۲- گزینهٔ ۲** یک راه این است که $A^{۲}$ را بیابیم، بعد $A^{۲}$ را در $A^{۲}$ و سپس حاصل را در $A^{۲}$ ضرب کنیم (می‌توانید $A^{۲}$ را در $A$ ضرب کنید و $A^{۳}$ را به دست آورید و در $A^{۳}$ ضرب کنید تا $A^{۶}$ به دست آید).

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۶ & ۶ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=\begin{bmatrix} ۱ & ۶ & ۶ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۹ & ۹ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A^{۶}=A^{۳}\times A^{۳}=\begin{bmatrix} ۱ & ۹ & ۹ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۹ & ۹ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱۸ & ۱۸ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های سطر اول $A^{۶}$ برابر است با: $۱+۱۸+۱۸=۳۷$

با توجه به $A$، $A^{۲}$ و $A^{۳}$ می‌شود حدس زد که $A^{n}$ به شکل مقابل است:

$$A^{n}=\begin{bmatrix} ۱ & ۳n & ۳n \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

یعنی مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس $A^{n}$، $۶n+۱$ است؛ اگر به جای n عدد ۶ قرار دهیم، مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس $A^{۶}$ برابر می‌شود با: $۶\times۶+۱=۳۷$

**۳۳- گزینهٔ ۴** همین اول در مورد گزینه‌ها توضیح کوتاهی بدهیم!

اگر تمام درایه‌های پایین قطر اصلی برابر صفر باشند به ماتریس، بالامثلثی و اگر تمام درایه‌های بالای قطر اصلی برابر صفر باشند به ماتریس پایین‌مثلثی می‌گویند.

اگر تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی ماتریس برابر صفر باشند، به این ماتریس، قطری می‌گویند و اگر در ماتریس قطری تمام درایه‌های روی قطر اصلی برابر یک باشند، به این ماتریس، ماتریس همانی (واحد) گویند.

برای این‌که به $A^{۴}$ برسیم باید $A^{۲}$ را به دست آوریم:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$$

$A^{۲}$ را در خودش ضرب می‌کنیم و به $A^{۴}$ می‌رسیم! به همین سادگی

$$A^{۴}=A^{۲}\times A^{۲}=\begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=I$$

بنابراین $A^{۴}$، همانی است.

**۳۴- گزینهٔ ۳** $A^{۲}$ را به دست می‌آوریم تا ببینیم بعد چه پیش می‌آید ...

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} -۱ & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۳ & ۳ \\ ۳ & ۳ & ۳ \\ ۳ & ۳ & ۳ \end{bmatrix}=-۳A$$

بنابراین: $A^{۳}=A^{۲}\times A=(-۳A)A=-۳A^{۲}=-۳(-۳A)=۳^{۲}A$

$$A^{۴}=A^{۳}\times A=۳^{۲}A\times A=۳^{۲}\times A^{۲}=۳^{۲}(-۳A)=-۳^{۳}A$$

$$A^{۵}=A^{۴}\times A=-۳^{۳}A\times A=-۳^{۳}A^{۲}=-۳^{۳}(-۳A)=۳^{۴}A$$

مجموع درایه‌های $A$ برابر ۹- یا $-۳^{۲}$ است، پس مجموع درایه‌های $A^{۵}$ برابر با $۳^{۴}\times(-۳^{۲})=-۳^{۶}$ خواهد بود.

اگر دنبال $A^{n}$ بودیم از روی $A^{۲}=-۳A$ ، $A^{۳}=۳^{۲}A$ ، $A^{۴}=-۳^{۳}A$ و ... می‌توانستیم حدس بزنیم $A^{n}=(-۳)^{n-۱}A$ است.

**۳۵- گزینهٔ ۳** طبق معمول اول باید $A^{۲}$ را به دست آوریم:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

باید رابطه‌ای بین $A$، $A^{۲}$، $A^{۳}$ و ... بیابیم.

$$A^{۳}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

خیلی راحت می‌توان حدس زد که $A^{n}$ به شکل $\begin{bmatrix} ۱ & n \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ خواهد بود.

بنابراین:

$$A^{۱۲}+A^{۱۳}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱ & ۱۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۲۵ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۱۲}+A^{۱۳}$ برابر است با: $۲+۲۵+۲=۲۹$

**۳۶- گزینهٔ ۲** دو نکته را با هم مرور می‌کنیم و سپس به سؤال پاسخ می‌دهیم.

۱ اگر $A=\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}$ باشد (یعنی $A$ یک ماتریس قطری باشد)، $A^{n}=\begin{bmatrix} a^{n} & ۰ & ۰ \\ ۰ & b^{n} & ۰ \\ ۰ & ۰ & c^{n} \end{bmatrix}$ است.

۱ اگر $A=\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰\\ d & b & ۰\\ e & f & c\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} a' & ۰ & ۰\\ d' & b' & ۰\\ e' & f' & c'\end{bmatrix}$ باشند، AB به صورت $\begin{bmatrix} aa' & ۰ & ۰\\ \bigcirc & bb' & ۰\\ \bigcirc & \bigcirc & cc'\end{bmatrix}$ است.

(به ماتریسی که تمام درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر باشند، ماتریس پایین‌مثلثی گویند.)

با توجه به نکات بالا داریم: $B^۲=\begin{bmatrix} ۱^۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & (-۲)^۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲^۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۴ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۴\end{bmatrix}$

$$B^۲A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۴ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۳ & ۰\\ ۲ & -۱ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰\\ \bigcirc & -۱۲ & ۰\\ \bigcirc & \bigcirc & ۸\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های روی قطر اصلی $B^۲A$ برابر با $-۱+(-۱۲)+۸=-۵$ است.

---

**۳۷- گزینهٔ ۳** اگر $A^۲$ را به دست آورید می‌بینید که $A^۲=I$ خواهد شد.

یاد بگیرید! که اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & \frac{۱}{a}\\ ۰ & ۱ & ۰\\ a & ۰ & ۰\end{bmatrix}$ باشد $A^۲=I$ است.

بنابراین:
$$B^۲+C^۲=(I-A)^۲+(A+I)^۲$$
$$=I^۲-۲AI+A^۲+(A^۲+۲AI+I^۲)$$
$$=I-۲A+A^۲+A^۲+۲A+I=۲A^۲+۲I$$

از آن‌جا که $A^۲=I$ است، پس: $B^۲+C^۲=۲A^۲+۲I=۲I+۲I=۴I$

۱ در حالت کلی اتحادها در ماتریس‌ها برقرار نیستند؛ اما اتحادها بین دو ماتریس A و I برقرارند.

۲ $I^n=I$

۳ اگر $A^۲=I$ باشد (به ماتریس A، متناوب گویند)، آن‌گاه:
$$\begin{cases} A^{۲n}=I\\ A^{۲n-۱}=A\end{cases}$$

---

**۳۸- گزینهٔ ۲** در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت تعویض‌پذیری ندارد؛ یعنی در ماتریس خیلی وقت‌ها $AB=BA$ نیست. مثلاً اتحاد $(A+B)^۲$ در ماتریس‌ها به این شکل باز می‌شود.

$$(A+B)^۲=(A+B)(A+B)=A^۲+AB+BA+B^۲$$

حالا که $A^۲$، $B^۲$ و $A+B$ را داریم، می‌توانیم با استفاده از اتحاد اشاره‌شده، $AB+BA$ را به دست آوریم.

$$(A+B)^۲=\begin{bmatrix} ۳ & ۲\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۲\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۳ & ۱۲\\ ۱۲ & ۱۳\end{bmatrix}$$

بنابراین: $(A+B)^۲-A^۲-B^۲=AB+BA$

$$\begin{bmatrix} ۱۳ & ۱۲\\ ۱۲ & ۱۳\end{bmatrix}-(\begin{bmatrix} ۰ & ۳\\ -۳ & ۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۷ & ۳\\ ۹ & ۷\end{bmatrix})=AB+BA$$

پس: $AB+BA=\begin{bmatrix} ۱۳ & ۱۲\\ ۱۲ & ۱۳\end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۷ & ۶\\ ۶ & ۱۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۶ & ۶\\ ۶ & ۳\end{bmatrix}$

---

**۳۹- گزینهٔ ۴** یک راه این است که به جای A، $B+C$ جایگزین کنیم و حاصل را به دست آوریم؛ این راه کمی طولانی است! ما با دسته‌بندی و فاکتورگرفتن کمی راحت‌تر سؤال را حل می‌کنیم. ببینید

با توجه به رابطهٔ $A=B+C$ داریم: $A-B=C$

$$(A^۲-AB)+(B^۲-BA)=A(A-B)+B(B-A)$$
$$=A(C)+B(-C)=AC-BC=(A-B)C=C^۲$$

شاید باورتان نشود! $A^۲+B^۲-AB-BA$ بازشدهٔ $(A-B)^۲$ است.

$$A^۲+B^۲-AB-BA=(A-B)(A-B)=(A-B)^۲=C^۲$$

در حالت کلی ضرب دو ماتریس خاصیت تعویض‌پذیری ندارد؛ یعنی در ماتریس‌ها خیلی اوقات $AB=BA$ **نیست**.

---

**۴۰- گزینهٔ ۲** اگر ضرب دو ماتریس خاصیت جابه‌جایی (تعویض‌پذیری) داشته باشد، اتحادهای جبری برای آن‌ها برقرار است و برعکس!

در این‌جا برای A و B، اتحاد برقرار است پس ضرب دو ماتریس خاصیت جابه‌جایی دارد، یعنی باید $AB=BA$ باشد، پس:

$$\begin{bmatrix} x & y\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۴ & -۳\\ -۳ & -۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۴ & -۳\\ -۳ & -۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}$$

بنابراین: $\begin{bmatrix} -۴x-۳y & -۳x-۴y\\ -۵ & -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۴x-۶ & -۴y+۳\\ -۳x-۸ & -۳y+۴\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{cases} -۳x-۸=-۵ \Rightarrow -۳x=۳ \Rightarrow x=-۱\\ -۳y+۴=-۲ \Rightarrow -۳y=-۶ \Rightarrow y=۲\end{cases}$$

اگر به جای x و y مقادیر آن‌ها را جایگزین کنیم، خواهید دید که بقیهٔ درایه‌های ماتریس هم با هم برابرند.

حالا باید خواستهٔ سؤال را برآورده کنیم!

$$\begin{bmatrix} x & ۲ & -y\end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱\\ ۲\\ -x\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱\\ ۲\\ ۱\end{bmatrix}=-۱+۴-۲=۱$$

---

**۴۱- گزینهٔ ۴** $A^۲+AB+BA+B^۲$ همان $(A+B)^۲$ است.

(می‌دانیم که در حالت کلی اتحادها در ماتریس‌ها برقرار نیستند.)

از رابطهٔ داده‌شده در صورت سؤال نتیجه می‌گیریم: $A+B=\begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} & -۱\\ \frac{۳}{۴} & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$

باید $A+B$ را به توان ۲ برسانیم تا بعد ببینیم چه عملیاتی ما را به پاسخ می‌رساند.

$$(A+B)^۲=\begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} & -۱\\ \frac{۳}{۴} & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} & -۱\\ \frac{۳}{۴} & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} & ۰\\ ۰ & -\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}=-\frac{۱}{۲}I$$

تقریباً به پاسخ سؤال نزدیک شدیم.

$$(A^۲+AB+BA+B^۲)^۳=((A+B)^۲)^۳=(\frac{-۱}{۲}I)^۳$$
$$=-\frac{۱}{۸}I^۳=-\frac{۱}{۸}I=\begin{bmatrix} -\frac{۱}{۸} & ۰\\ ۰ & -\frac{۱}{۸}\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس $(A^۲+AB+BA+B^۲)^۳$ برابر است با: $-\frac{۱}{۸}+(-\frac{۱}{۸})=-\frac{۱}{۴}$

**۴۲- گزینهٔ ۲** داریم: $A^۲=۲A+I$

طرفین تساوی بالا را در $A^۲$ ضرب می‌کنیم و هر جا $A^۲$ دیدیم به جای آن $۲A+I$ قرار می‌دهیم.

$$A^۲\times A^۲=A^۲(۲A+I)\Rightarrow A^۴=(۲A+I)(۲A+I)$$
$$\Rightarrow A^۴=۴A^۲+۴A+I\Rightarrow A^۴=۴(۲A+I)+۴A+I$$
$$\Rightarrow A^۴=۱۲A+۵I$$

کافی است طرفین تساوی بالا را در A ضرب کنیم تا $A^۵$ به دست آید.

$$A\times A^۴=A(۱۲A+۵I)\Rightarrow A^۵=۱۲A^۲+۵A$$
$$\Rightarrow A^۵=۱۲(۲A+I)+۵A\Rightarrow A^۵=۲۹A+۱۲I$$

بنابراین: $A^۵-A^۴=(۲۹A+۱۲I)-(۱۲A+۵I)=۱۷A+۷I$

حواسمان هست! که:

۱ I به هر توانی برسد خودش می‌شود $(I^n=I)$.

۲ ضرب هر ماتریسی در I خودش می‌شود $(AI=IA=A)$.

**۴۳- گزینهٔ ۱** باید سعی کنیم از رابطه‌های داده‌شده به توان‌های A برسیم.

اگر طرفین رابطهٔ $BA=۲A$ را از چپ در A ضرب کنیم، داریم:

$$ABA=A(۲A)\Rightarrow (AB)A=۲A^۲\xrightarrow{AB=B} BA=۲A^۲$$

با توجه به فرض سؤال، $A^۲$ به دست می‌آید.

$$\begin{cases}BA=۲A^۲\\BA=۲A\end{cases}\Rightarrow ۲A^۲=۲A\Rightarrow A^۲=A$$

به راحتی می‌توانیم $A^۴$ و $A^۷$ را از روی $A^۲=A$ به دست آوریم.

$$A^۲=A\xrightarrow{\text{توان ۲}} A^۴=A^۲\xrightarrow{A^۲=A}\boxed{A^۴=A}$$
$$\xrightarrow{\times A^۲} A^۶=A^۳\xrightarrow{\times A} A^۷=A^۴\xrightarrow{A^۴=A} A^۷=A$$

بنابراین: $۲A^۷-۳A^۴=۲A-۳A=-A$

اگر $A^۲=A$ باشد به ماتریس A خودتوان گویند؛ یعنی A به هر توانی (البته توان طبیعی) برسد، خودش می‌شود.

$$A^۲=A\xrightarrow{n\in\mathbb{N}} A^n=A$$

پس: $A^۴=A^۷=A\Rightarrow ۲A^۷-۳A^۴=۲A-۳A=-A$

**۴۴- گزینهٔ ۲** $A(BA)^۴B$ را از ما خواسته! بازش کنیم ببینیم با چه چیزی روبه‌رو هستیم ...

$$A(BA)^۴B=A(BA)(BA)(BA)(BA)B$$
$$=(AB)(AB)(AB)(AB)(AB)=(AB)^۵$$

در واقع سؤال $(AB)^۵$ را می‌خواسته اما با کمی شیطنت!!!

اول $(AB)^۲$ را پیدا می‌کنیم و کم‌کم پیش می‌رویم تا به $(AB)^۵$ برسیم.

$$(AB)^۲=\begin{bmatrix}۱&-۱\\۲&-۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&-۱\\۲&-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱&۱\\-۲&۲\end{bmatrix}$$
$$(AB)^۴=\begin{bmatrix}-۱&۱\\-۲&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱&۱\\-۲&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱&۱\\-۲&۲\end{bmatrix}$$
$$(AB)^۵=(AB)^۴(AB)=\begin{bmatrix}-۱&۱\\-۲&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&-۱\\۲&-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&-۱\\۲&-۲\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس $(AB)^۵$ برابر با ۰ است. $۱+(-۱)+۲+(-۲)=۰$

**۴۵- گزینهٔ ۲** باید بتوانیم از روی $AB=۲BA$، $AB^۳$ و $B^۳A$ بسازیم.

اگر طرفین رابطهٔ $AB=۲BA$ را از راست در $B^۲$ ضرب کنیم، داریم:

$$AB=۲BA\xrightarrow{\times B^۲} AB^۳=۲BAB^۲\Rightarrow AB^۳=۲B(AB)B$$
$$\xrightarrow{AB=۲BA} AB^۳=۲B(۲BA)B\Rightarrow AB^۳=۴B^۲(AB)$$
$$\xrightarrow{AB=۲BA} AB^۳=۴B^۲(۲BA)\Rightarrow AB^۳=۸B^۳A$$
$$\xrightarrow{\div ۸} B^۳A=\frac{۱}{۸}AB^۳$$

بنابراین $k=\frac{۱}{۸}$ است.

**۴۶- گزینهٔ ۲** از $۲A+۳B=\bar{O}$ نتیجه می‌گیریم: $B=-\frac{۲}{۳}A$

از $A^۲=-\frac{۳}{۲}A$ هم نتیجه می‌گیریم:

$$A^۴=(-\frac{۳}{۲}A)^۲=\frac{۹}{۴}A^۲=\frac{۹}{۴}(-\frac{۳}{۲}A)=-\frac{۲۷}{۸}A$$

بنابراین: $A(A+B)(۲A-B)(A-B)$

$$=A(A-\frac{۲}{۳}A)(۲A+\frac{۲}{۳}A)(A+\frac{۲}{۳}A)$$
$$=A(\frac{A}{۳})(\frac{۸A}{۳})(\frac{۵A}{۳})=\frac{۴۰A^۴}{۲۷}=\frac{۴۰(-\frac{۲۷}{۸}A)}{۲۷}=-۵A$$

**۴۷- گزینهٔ ۴** اگر $A\times B=C$ باشد، درایه‌های واقع در سطر iاُم و ستون jاُم از C حاصل‌ضرب سطر iاُم ماتریس A در ستون jاُم ماتریس B به دست می‌آید.

از ما درایهٔ واقع در سطر چهارم و ستون سوم AB (یعنی $C_{۴۳}$) را خواسته، بنابراین این درایه از ضرب سطر چهارم A در ستون سوم B به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix}۰&۵&۲&-۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱\\۲\\۵\\۰\end{bmatrix}=(۰\times(-۱))+(۵\times۲)+(۲\times۵)+((-۱)\times۰)=۲۰$$

**۴۸- گزینهٔ ۱** باید ضرب کنیم دیگه

$$\begin{bmatrix}۱&-۱&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۱&x\\-x&۰&-۱\\۳&-۲&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+۸&-۳&x+۳\end{bmatrix}$$

حالا باید ماتریس بالا را در $\begin{bmatrix}-۲\\-۱۰\\-x\end{bmatrix}$ ضرب کنیم.

$$\begin{bmatrix}x+۸&-۳&x+۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲\\-۱۰\\-x\end{bmatrix}=۰$$
$$\Rightarrow -۲x-۱۶+۳۰-x^۲-۳x=۰$$
$$\Rightarrow -x^۲-۵x+۱۴=۰\Rightarrow x^۲+۵x-۱۴=۰$$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها $=-\frac{۱۴}{۱}=-۱۴$

می‌دانیم حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ برابر با $\frac{c}{a}$ است.

**۴۹- گزینهٔ ۳** $A^۲$ را به دست می‌آوریم و بعد تصمیم می‌گیریم چطور به $A^۶$ برسیم.

$$A^۲=\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۱&۱&۱\\۱&۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۱&۱&۱\\۱&۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&۳&۳\\۳&۳&۳\\۳&۳&۳\end{bmatrix}=۳A$$

بنابراین: $A^3 = A^2\times A = 3A\times A = 3A^2 = 3(3A) = 9A$

$$A^6 = A^3\times A^3 = 9A\times 9A = 81A^2 = 81(3A) = 3^4\times 3^1 A = 3^5 A$$

مجموع درایه‌های ماتریس A برابر ۹ یا $3^2$ است.

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس $A^6$ برابر $3^5\times 3^2 = 3^7$ است.

اگر از ما $A^n$ را خواسته بود از روی $A^2=3A$، $A^3=3^2A$ و ... می‌گفتیم $A^n=3^{n-1}A$ است.

**۵۰- گزینهٔ ۴** از تکنیک جایگزینی! برای حل سؤال استفاده می‌کنیم:

$$BA = 3AB \Rightarrow AB = \frac{BA}{3}$$

بنابراین: $mAB^3 = B^3A \Rightarrow m(AB)B^2 = B^3A$

$$\Rightarrow m\left(\frac{BA}{3}\right)B^2 = B^3A \Rightarrow m\left(\frac{B}{3}\right)(AB)B = B^3A$$

$$\Rightarrow m\left(\frac{B}{3}\right)\left(\frac{BA}{3}\right)B = B^3A \Rightarrow m\left(\frac{B}{3}\right)\left(\frac{B}{3}\right)(AB) = B^3A$$

$$\Rightarrow m\left(\frac{B}{3}\right)\left(\frac{B}{3}\right)\left(\frac{BA}{3}\right) = B^3A$$

بعد از جایگزینی‌های نفس‌گیر، می‌توانیم جواب سؤال را بدهیم.

$$\frac{m}{27}B^3A = B^3A \Rightarrow m = 27$$

**۵۱- گزینهٔ ۱** از $A+B=I$ نتیجه می‌گیریم: $B=I-A$

کافی است یک بار از راست و یک بار از چپ، رابطهٔ بالا را در A ضرب کنیم.

$$B=I-A \xrightarrow{A\times} AB = A-A^2$$

$$\xrightarrow{A^2=A} AB = A-A = \bar{O}$$

$$B=I-A \xrightarrow{\times A} BA = A-A^2$$

$$\xrightarrow{A^2=A} BA = A-A = \bar{O}$$

بنابراین: $AB=BA$

**۵۲- گزینهٔ ۲** در حالت کلی ضرب دو ماتریس $\begin{bmatrix}1&0\\a&1\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}1&0\\b&1\end{bmatrix}$ به صورت $\begin{bmatrix}1&0\\a+b&1\end{bmatrix}$ است. بنابراین:

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}1&0\\10&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-11&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\0-1+2-\cdots+10-11&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\-6&1\end{bmatrix}$$

$$(0-1)+(2-3)+\cdots+(10-11) = \underbrace{-1-1-\cdots-1}_{\text{۶ جمله}} = -6$$

**۵۳- گزینهٔ ۳** $A^2$ را به دست بیاوریم، شاید فرجی شد ...

$$A^2 = \begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = I$$

*چه‌قدر خوب شد!* $A^{1400} = (A^2)^{700} = I^{700} = I$

$$A^{1399} = (A^2)^{699}\times A = I^{699}\times A = I\times A = A$$

بنابراین:

$$A^{1400}-A^{1399} = I-A = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

(۱) ماتریس همانی (I) به هر توانی (منظورم توان حسابی است) برسد، خودش می‌شود. $I^n = I$

(۲) ماتریس همانی (I) در هر ماتریس هم‌مرتبه‌ای مانند A ضرب شود، حاصل A می‌شود. $I\times A = A\times I = A$

**۵۴- گزینهٔ ۲** سعی می‌کنیم از روی A، $A^2$، $A^3$ و ...، $A^n$ را حدس بزنیم.

$$A^2=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^2&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}4&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^3&0\\0&1\end{bmatrix}$$

می‌توان گفت $A^n$ به صورت $A^n=\begin{bmatrix}2^n&0\\0&1\end{bmatrix}$ است.

بنابراین $A^n-A^{n-1}$ برابر است با:

$$\begin{bmatrix}2^n&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2^{n-1}&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^n-2^{n-1}&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2^n(1-\frac{1}{2})&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^{n-1}&0\\0&0\end{bmatrix}$$

می‌توانستید $A^2$ و $A^3$ را به دست آورید و تفاضل آن‌ها را در گزینه‌ها پیدا کنید. (چرا؟ چون حاصل گزینه‌ها باید به ازای هر توان طبیعی n برقرار باشد.)

$$A^3-A^2=\begin{bmatrix}8&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0\\0&0\end{bmatrix}$$

باید ببینیم به ازای $n=3$، کدام گزینه $\begin{bmatrix}4&0\\0&0\end{bmatrix}$ را به ما می‌دهد. (۲) همان گزینهٔ مطلوب ما است.

**۵۵- گزینهٔ ۲** اول باید بدانیم اگر A به توان برسد چه شکلی می‌شود.

$$A^2=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}$$

می‌توان حدس زد که $A^n$ به شکل $A^n=\begin{bmatrix}1&n\\0&1\end{bmatrix}$ خواهد بود.

بنابراین: $BA^n=\begin{bmatrix}4&1\\3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&n\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&4n+1\\3&3n+2\end{bmatrix}$

پس باید: $\begin{bmatrix}4&4n+1\\3&3n+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&41\\3&32\end{bmatrix} \Rightarrow 4n+1=41 \Rightarrow n=10$

اگر از $3n+2=32$ نیز، n را به دست می‌آورید ۱۰ می‌شد!

**۵۶- گزینهٔ ۴** از $A^2-A=\bar{O}$ نتیجه می‌گیریم $A^2=A$ است.

توان دوم ماتریس $(2A-I)$ را به دست می‌آوریم ببینیم چه پیش می‌آید ...

$$(2A-I)^2 = 4A^2-4AI+I^2 = 4A^2-4A+I$$

$$\xrightarrow{A^2=A} (2A-I)^2 = 4A-4A+I \Rightarrow (2A-I)^2 = I$$

ما $(2A-I)^{1399}$ را می‌خواهیم، پس:

$$(2A-I)^{1399}=(2A-I)^{1398}(2A-I)=I^{699}(2A-I)=2A-I$$

بد نیست بدانید!

اگر $A^{۲} = I$ شود، به ماتریس A متناوب گویند. ماتریس متناوب به توان زوج برسد برابر I است و اگر به توان فرد برسد، خودش می‌شود.

$$A^{۲} = I \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} \begin{cases} A^{۲k} = I \\ A^{۲k-۱} = A \end{cases}$$

**۵۷- گزینهٔ ۴** درست است که کتاب در مورد $(B^{-۱}AB)^n$ حرفی نزده اما چیز سخت و عجیبی نیست!

$$(B^{-۱}AB)^n = B^{-۱}A\underbrace{BB^{-۱}}_{I}A\underbrace{BB^{-۱}}_{I}A\underbrace{B}_{I}...\underbrace{B^{-۱}}_{I}AB$$

$$= B^{-۱}A^nB$$

این نکته را به خاطر بسپارید: $(B^{-۱}AB)^n = B^{-۱}A^nB$

اگر بتوانیم تکلیف $A^{۱۴}$ را مشخص کنیم، عملاً پاسخ سؤال را پیدا کرده‌ایم.

$$A^{۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} = -I$$

بنابراین: $A^{۱۴} = (A^{۲})^{۷} = (-I)^{۷} = -I$

از این‌جا به بعد حتی نیاز به دست به قلم شدن! نیست.

$$(B^{-۱}AB)^{۱۴} = B^{-۱}A^{۱۴}B = B^{-۱}(-I)B = -B^{-۱}B = -I$$